

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Строительный факультет

Кафедра строительных технологий, геотехники и экономики строительства

УТВЕРЖДЕН  
на заседании кафедры  
строительных технологий, геотехники и  
экономики строительства  
«30» августа\_ 2017 г.,  
протокол №1  
Заведующий кафедрой  
Н.С.Соколов\_  
«30» августа 2017 г.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

по дисциплине

### **«ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ С ОСНОВАМИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ»**

Направление подготовки (специальность) 08.05.01 – «Строительство уникальных зданий и сооружений»

Квалификация (степень) выпускника – «Инженер-строитель»

Специализация № 2 "Строительство подземных сооружений"

Методические материалы разработаны на основе рабочей программы дисциплины, предусмотренной образовательной программой высшего образования (ОП ВО) по направлению подготовки 08.05.01 – «Строительство уникальных зданий и сооружений».

*СОСТАВИТЕЛИ:*

Профессор кафедры  
строительные конструкции \_\_\_\_\_ Л.А. Максимова

*СОГЛАСОВАНО:*

Методическая комиссия строительного факультета «30» августа 2017 г., протокол  
№1.

Декан факультета \_\_\_\_\_ А.Н. Плотников

Расчетно-графическая работа состоит из четырех задач, включающих: исследование плоского напряженно-деформированного состояния в точке тела для элементов конструкций типа тонкой пластины, оболочки, балки-стенки и др.; пространственного напряженного состояния в точке тела сооружений типа массива, грунтового основания и т.д.; решение плоской задачи теории упругости в декартовых и полярных координатах; решение задачи поперечного изгиба прямоугольных и круглых пластин; расчет осесимметричных оболочек вращения по безмоментной теории. В решение задачи 1 включены так же расчеты с использованием теории малых упругопластических деформаций. Каждая задача включает 30 вариантов.

## ЗАДАЧА 1. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

**Условие.** В некоторой частице тела (элемента конструкции типа плиты, оболочки, балки-стенки и др.) задано напряженное состояние в виде тензора напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Значения напряжений даны в табл. 1.1 в соответствии с номером варианта, который задается по списку студенческой группы, составленному преподавателем. Значения напряжений заданы формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 10(10 - N) \text{ МПа}, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 10(21 - N) \text{ МПа}, \\ \sigma_y &= 10(N - 15) \text{ МПа}, & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 10(16 - N) \text{ МПа}, \\ \sigma_z &= 10(N - 20) \text{ МПа}, & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = 10(N - 14) \text{ МПа}, \end{aligned}$$

где  $N$  – номер варианта.

В задаче 1 напряжения  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  принимаются равными нулю.

**Требуется:**

1. Графически изобразить напряжения на гранях малого элемента тела с учетом их фактических направлений.

2. Определить главные напряжения и направления, пользуясь формулами:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (1.3)$$

При необходимости перенумеровать главные напряжения в порядке убывания по алгебраической величине:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1.4)$$

3. Проверить величины главных напряжений, как напряжений в системе осей  $x'$ ,  $y'$ , повернутых на угол  $\alpha$ , по формулам:

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (1.5)$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Изобразить графически главные площадки и главные нормальные напряжения.

Определить напряжения в системе осей, повернутых на угол  $\alpha + 45^\circ$ , подставив в формулы (1.5) вместо  $\alpha$  угол  $\alpha + 45^\circ$ .

Таблица 1.1

Величины напряжений к задачам 1 и 2

№ варианта	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{yz}$	$\tau_{zx}$
1	90	-140	-190	200	150	-130
2	80	-130	-180	190	140	-120
3	70	-120	-170	180	130	-110
4	60	-110	-160	170	120	-100
5	50	-100	-150	160	110	-90
6	40	-90	-140	150	100	-80
7	30	-80	-130	140	90	-70
8	20	-70	-120	130	80	-60
9	10	-60	-110	120	70	-50
10	0	-50	-100	110	60	-40
11	-10	-40	-90	100	50	-30
12	-20	-30	-80	90	40	-20
13	-30	-20	-70	80	30	-10
14	-40	-10	-60	70	20	0
15	-50	0	-50	60	10	10
16	-60	10	-40	50	0	20
17	-70	20	-30	40	-10	30
18	-80	30	-20	30	-20	40
19	-90	40	-10	20	-30	50
20	-100	50	0	10	-40	60
21	-110	60	10	0	-50	70
22	-120	70	20	-10	-60	80
23	-130	80	30	-20	-70	90
24	-140	90	40	-30	-80	100
25	-150	100	50	-40	-90	110
26	-160	110	60	-50	-100	120
27	-170	120	70	-60	-110	130
28	-180	130	80	-70	-120	140
29	-190	140	90	-80	-130	150
30	-200	150	100	-90	-140	160

Убедиться в том, что инварианты тензора напряжений сохраняются:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x =$$

$$\begin{aligned}
&= (\tau'_{xy})^2 + (\tau'_{yz})^2 + (\tau'_{zx})^2 - \sigma'_x \sigma'_y - \sigma'_y \sigma'_z - \sigma'_z \sigma'_x = \\
&= -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1, \\
I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Третий инвариант вычисляется по обычным правилам раскрытия определителя третьего порядка.

4. Графически изобразить тензор напряжений в виде эллипсоида Ламе. Построить круги напряжений Мора, указать  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ ,  $\sigma_{\min} = \sigma_3$ . Вычислить главные касательные напряжения

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \tag{1.7}$$

Указать эти величины на кругах Мора и обосновать их инвариантность.

5. Определить среднее нормальное напряжение
- 6.

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.8}$$

и разложить тензор напряжений на шаровой тензор и тензор-девиатор

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

где компоненты тензора-девиатора напряжений вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
S_x &= \sigma_x - \sigma_0, \quad S_y = \sigma_y - \sigma_0, \quad S_z = \sigma_z - \sigma_0, \\
S_{xy} &= S_{yx} = \tau_{xy}, \quad S_{yz} = S_{zy} = \tau_{yz}, \quad S_{zx} = S_{xz} = \tau_{zx}.
\end{aligned}$$

7. Вычислить на октаэдрических площадках нормальное напряжение
- 8.

$$\sigma_{окт} = \sigma_0, \tag{1.10}$$

где  $\sigma_0$  – среднее напряжение, вычисляемое по формуле (1.8), касательное

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \tag{1.11}$$

а также интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{1.12}$$

Сравнить  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{окт}$ .

9. Пользуясь данными табл. 1.2 вычислить и занести в таблицу для каждой точки диаграммы  $\sigma_i \sim \varepsilon_i$  пластический модуль  $E_p$ , пластический коэффициент Пуассона  $\mu_p$  (принимая условие упругого изменения объема), пластический модуль сдвига  $G_p$ , используя формулы

$$E_p = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad \mu_p = 0,5 - (0,5 - \mu) \frac{E_p}{E}, \quad G_p = \frac{E_p}{2(1 + \mu_p)}, \quad (1.13)$$

где  $\varepsilon_i$  - интенсивность деформаций.

Диаграмма растяжения тонкостенной трубки из стали 45 ( $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,3$ )

Таблица 1.2

Номер точки	$\sigma_i = \sigma_x$ (МПа)	$\varepsilon_i \cdot 10^3 =$ $= \varepsilon_x \cdot 10^3$	$E_p \cdot 10^{-5}$ (МПа)	$\mu_p$	$G_p \cdot 10^{-5}$ (МПа)
1	165	0,824	2,00	0,300	0,770
2	224	1,12	2,00	0,300	0,769
3	279,5	1,42	1,97	0,303	0,755
4	320	1,73	1,85	0,315	0,703
5	344	2,06	1,67	0,333	0,626
6	352	2,66	1,32	0,368	0,484
7	364	3,26	1,12	0,388	0,402
8	386	4,16	0,928	0,407	0,330
9	403	5,35	0,753	0,425	0,264
10	435	6,56	0,663	0,434	0,231
11	447	7,76	0,576	0,442	0,200
12	453	8,96	0,506	0,449	0,174
13	464	10,2	0,455	0,455	0,156
14	478	12,0	0,398	0,460	0,136
15	491	13,2	0,372	0,463	0,127
16	496	13,8	0,359	0,464	0,123
17	506	15,1	0,335	0,466	0,114
18	517	16,2	0,319	0,468	0,109
19	526	17,4	0,302	0,470	0,103
20	535	18,6	0,288	0,471	0,098
21	543,5	19,7	0,276	0,472	0,094
22	550,5	20,9	0,263	0,474	0,089
23	559	22,0	0,254	0,475	0,086
24	566,5	23,8	0,238	0,476	0,081
25	573,5	24,6	0,233	0,477	0,079

Обосновать, почему при растяжении тонкостенной трубки  $\sigma_i = \sigma_x$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_x$ .

10. Начертить в масштабе графики зависимостей  $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ ,  $E_p \sim \sigma_i$ ,  $\mu_p \sim \sigma_i$ ,  $G_p \sim \sigma_i$ .

Определить по графикам предел пропорциональности материала и установить, в каком состоянии (упругом, упругопластическом) находится материал, используя условия пластичности Сен-Венана и Мизеса.

11. Определить деформации пользуясь обобщенным законом Гука для упругого материала

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_x - 3\mu\sigma_0], \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{(1 + \mu)}{E}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_y - 3\mu\sigma_0], \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{(1 + \mu)}{E}\tau_{yz}, \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[(1+\mu)\sigma_z - 3\mu\sigma_0], \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{(1+\mu)}{E}\tau_{zx}.$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G}(\sigma_x - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G}(\sigma_y - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G}(\sigma_z - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}$ ,  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ ,

либо соотношениями теории малых упругопластических деформаций (ТМУПД) за пределом упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G_p}(\sigma_x - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G_p}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G_p}(\sigma_y - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G_p}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G_p}(\sigma_z - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G_p}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{E_p}{3(1-2\mu_p)} = \text{const}, \quad G_p = \frac{E_p}{2(1+\mu_p)}.$$

12. Определить главные деформации по формулам

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z. \quad (1.17)$$

При необходимости перенумеровать главные деформации в порядке убывания по алгебраической величине:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3. \quad (1.18)$$

Проверить величины главных деформаций по формулам для упругого материала

$$\varepsilon_k = \frac{1}{E}[(1+\mu)\sigma_k - 3\mu\sigma_0] = \frac{1}{2G}(\sigma_k - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.19)$$

либо упругопластического материала

$$\varepsilon_k = \frac{1}{E_p}[(1+\mu_p)\sigma_k - 3\mu_p\sigma_0] = \frac{1}{2G_p}(\sigma_k - \sigma_0) + \varepsilon_0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.20)$$

13. Вычислить октаэдрический сдвиг

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (1.21)$$

и сравнить его со значением, полученным по формулам

$$\gamma_{окт} = \frac{\tau_{окт}}{G}, \quad \gamma_{окт} = \frac{\tau_{окт}}{G_p}. \quad (1.22)$$

для упругого или упругопластического материала соответственно.

Вычислить главные сдвиги. Сравнить величины  $\gamma_{\max}$  и  $\gamma_{окт}$ .

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_{\max} = \gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (1.23)$$

## ЗАДАЧА 2. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

**Условие.** В некоторой частице тела (массива, сооружения, грунтового основания, в зоне контактных местных напряжений и т.д.) определены компоненты напряженного состояния, характеризуемые тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Значения напряжений даны в таблице 1.1 в соответствии с номером варианта.

### Требуется:

1. Графически изобразить компоненты тензора на гранях малого элемента тела с учетом их фактических направлений.

2. Определить среднее напряжение по формуле (1.8) и разложить тензор напряжений на шаровой тензор и девиатор напряжений по (1.9).

3. Определить октаэдрическое касательное напряжение

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (2.1)$$

модуль тензора-девиатора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{2J_2} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + 2(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2)} = \sqrt{3}\tau_{окт} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

интенсивность напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{3J_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

4. Найти главные значения тензора-девиатора напряжений и главные напряжения

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \cos \varphi, \\ S_2 &= \sigma_2 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \cos \left( \varphi - \frac{2\pi}{3} \right), \\ S_3 &= \sigma_3 - \sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \cos \left( \varphi + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Угол  $\varphi$  определяется из формулы

$$\cos 3\varphi = \frac{3\sqrt{6} |D_{\sigma}|}{\sigma^3}, \quad (2.5)$$



где

$$|D_{\sigma}| = \begin{vmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{vmatrix} = S_x S_y S_z + 2S_{xy} S_{yz} S_{zx} - S_x S_y^2 - S_y S_z^2 - S_z S_x^2 \quad (2.6)$$

- определитель матрицы тензора-девиатора напряжений.

5. Пользуясь экспериментальными данными табл. 1.2 установить, в каком состоянии (упругом, упругопластическом) находится частица тела согласно условиям пластичности Сен-Венана и Мизеса.

### ЗАДАЧА 3. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБРАТНЫМ МЕТОДОМ

**Условие.** На гранях балки-стенки (рис. 3.1) длиной  $l = 2h$ , высотой  $h$  и единичной толщины действуют внешние силы, равномерно распределенные по ее толщине. Объемными силами пренебрегаем. Функция напряжений задана в таблице 3.1 в соответствии с номером варианта.

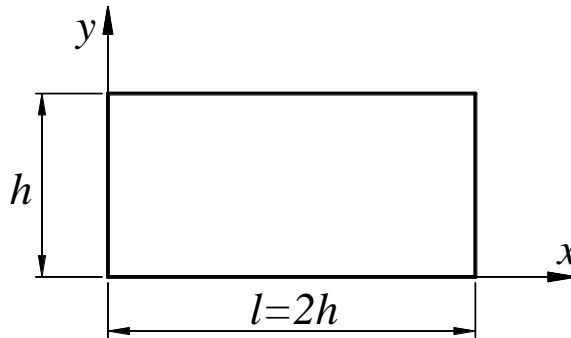


Рис. 3.1

Таблица 3.1

Исходные данные к задаче 3

№ вар.	$\varphi(x, y)$	№ вар.	$\varphi(x, y)$
1	$xy^3 + 5hxy^2 + 2hx^3$	16	$6yx^3 + 3hx^2y + hy^3$
2	$2xy^3 - 4hx^2y + 3hx^3$	17	$5yx^3 + 2hxy^2 - 2hy^3$
3	$-3xy^3 + 3hxy^2 - 4hx^3$	18	$4yx^3 - hx^2y + 3hy^3$
4	$4xy^3 + 2hx^2y - 5hx^3$	19	$-3yx^3 + 2hxy^2 + 4hy^3$
5	$-5xy^3 - hxy^2 + 6hx^3$	20	$2yx^3 - 3hx^2y - 5hy^3$
6	$3hx(x^2 + y^2) + hx^2y + 5h^2xy$	21	$xy^3 + 3hx^3 + 4hy^3 - h^2xy$
7	$2hx(x^2 + y^2) - 6hx^2y + h^2xy$	22	$-2xy^3 + 4hx^3 - hy^3 + 5h^2xy$
8	$hx(x^2 + y^2) - 3hx^2y - 4h^2xy$	23	$xy^3 + 6hx^3 - 2hy^3 + 2h^2xy$
9	$-hx(x^2 + y^2) + 2hx^2y + 3h^2xy$	24	$3xy^3 - 2hx^3 - hy^3 - 4h^2xy$
10	$2hx(x^2 - y^2) - 4hx^2y + 2h^2xy$	25	$2xy^3 + hx^3 + 5hy^3 + 4h^2xy$
11	$2hy(x^2 + y^2) - hxy^2 + 2h^2xy$	26	$2hx^3 + 3hx^2y + 5hxy^2 + h^2xy$

12	$3hy(x^2 + y^2) + 4hxy^2 + h^2xy$	27	$hx^3 + 3hx^2y - 2hxy^2 + 4h^2xy$
13	$-hy(x^2 + y^2) + 3hxy^2 + 4h^2xy$	29	$hx^3 - 4hx^2y + 2hxy^2 - 3h^2xy$
14	$hy(x^2 - y^2) + 5hxy^2 + 6h^2xy$	29	$3hx^3 - hx^2y + 4hxy^2 + 2h^2xy$
15	$hy(x^2 + y^2) - 2hxy^2 - 3h^2xy$	30	$2hx^3 + 2hx^2y + 3hxy^2 - 5h^2xy$

**Требуется:**

1. Проверить, является ли заданная функция напряжений решением плоской задачи теории упругости.
2. Найти выражения для напряжений.
3. Определить, какой внешней нагрузке на гранях балки-стенки соответствует заданная функция напряжений. Нагрузки на гранях балки-стенки показать в виде эпюр.
4. Провести проверку равновесия балки-стенки.

**ЗАДАЧА 4. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**Условие.** Упругое тело заданной формы находится в условиях плоской задачи. Схема задачи и нагрузка даны на рис. 4.1 в соответствии с номером варианта.

**Требуется:**

5. Проверить, является ли заданная функция напряжений решением плоской задачи теории упругости.
6. Найти выражения для напряжений.
7. Составить граничные условия и найти постоянные, входящие в выражения для напряжений.
8. Проверить, удовлетворяют ли окончательные выражения для напряжений дифференциальным уравнением равновесия.
9. Построить эпюры напряжений в характерных сечениях.

Для упругого полубесконечного массива, находящегося в условиях плоской задачи (плоская деформация) под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 4.2) функция напряжений задана в виде

$$\varphi = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D(x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

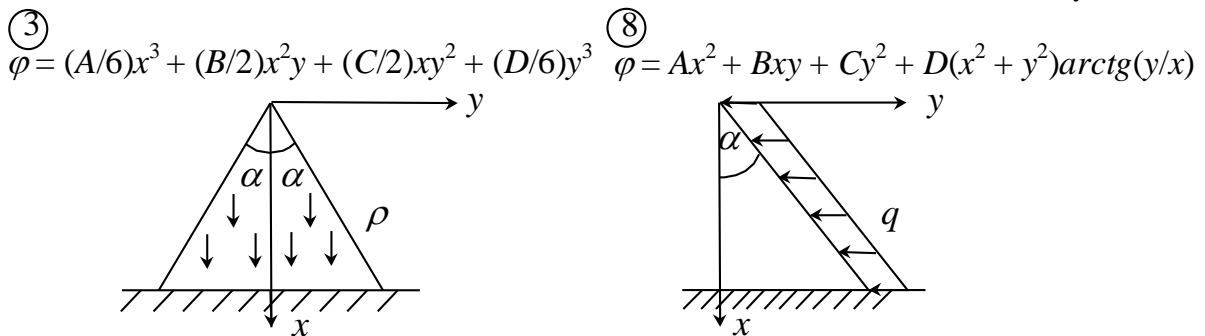
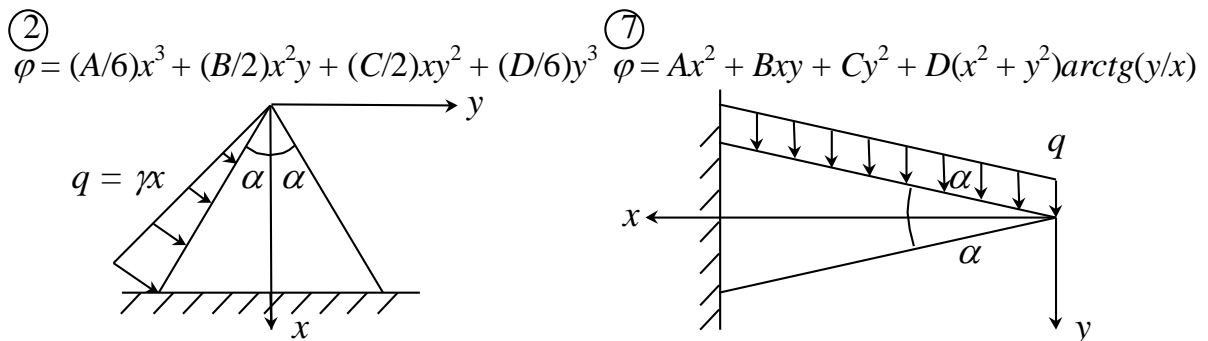
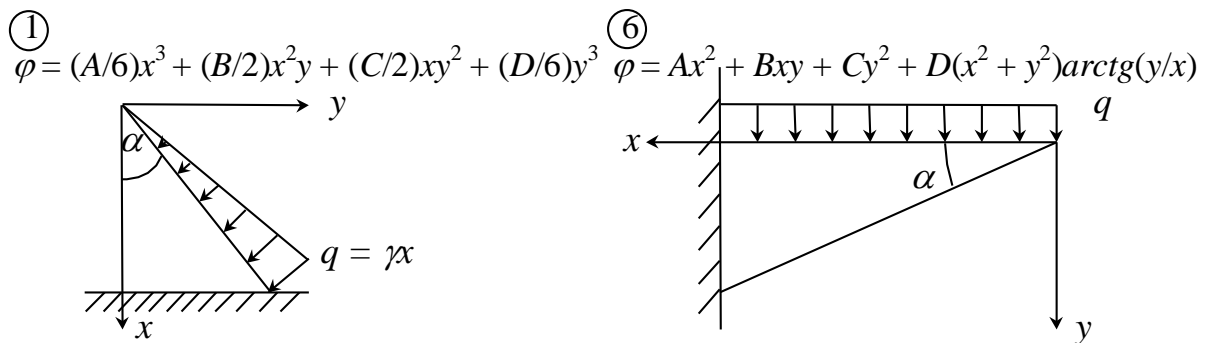
1. Вычисляются производные от функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2Ax + By + D \left[ 2x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \cdot \frac{1 \cdot (-y/x^2)}{1 + (y/x)^2} \right] = \\ &= 2Ax + By + D \left[ 2x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2A + D \left[ 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2x \frac{1 \cdot (-y/x^2)}{1 + (y/x)^2} \right] = 2A + 2D \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= Bx + 2Cy + D \left[ 2y \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \cdot \frac{1 \cdot (1/x)}{1 + (y/x)^2} \right] = \\ &= Bx + 2Cy + D \left[ 2y \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + x \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2C + D \left[ 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2y \frac{1(1/x)}{1 + (y/x)^2} \right] = 2C + 2D \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right].$$



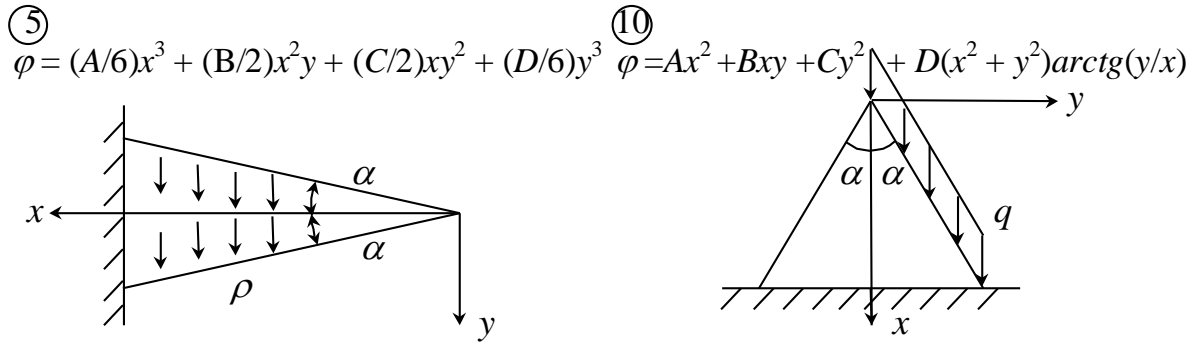
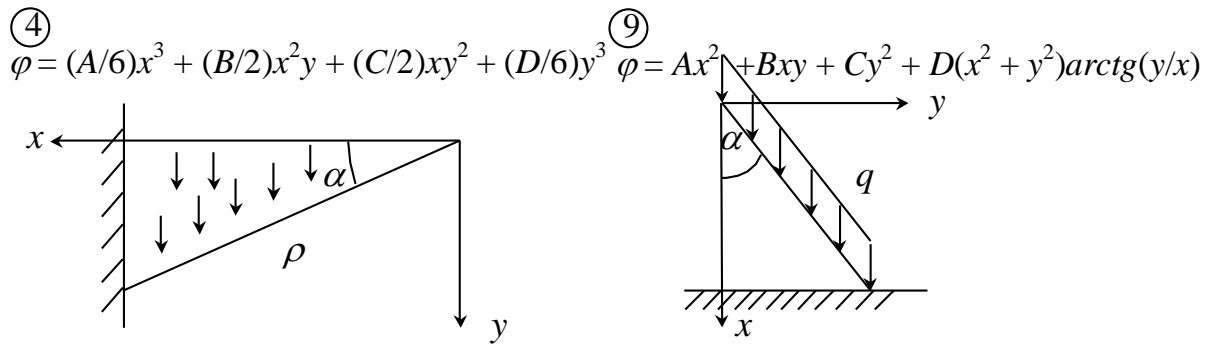
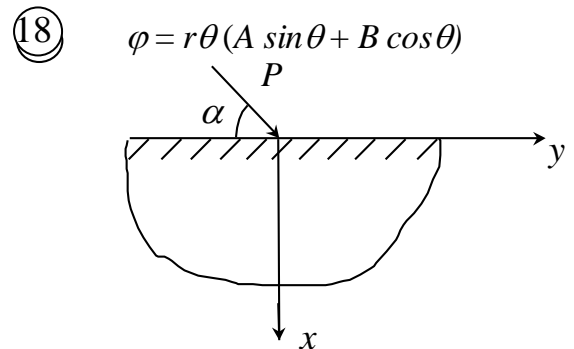
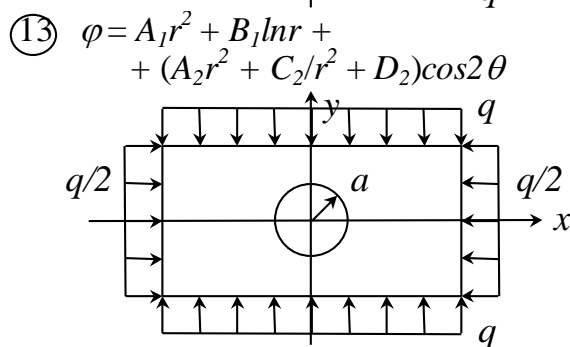
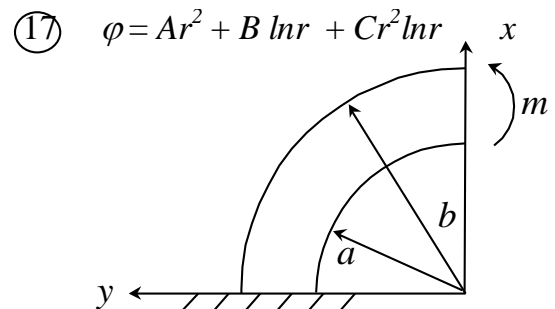
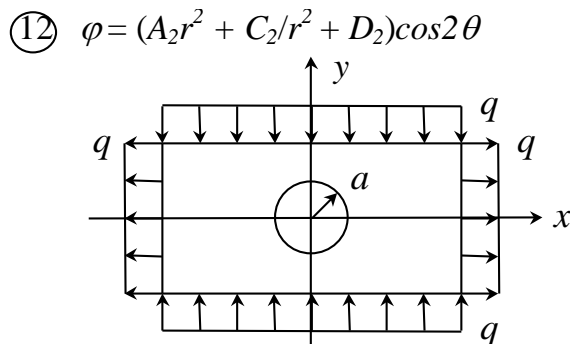
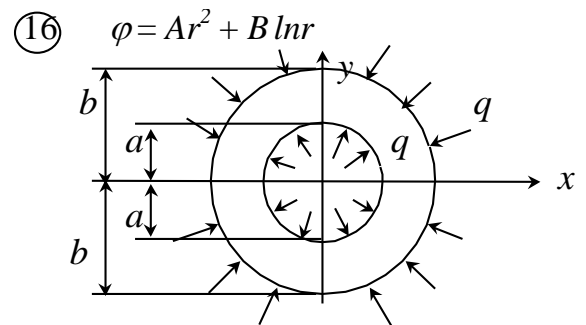
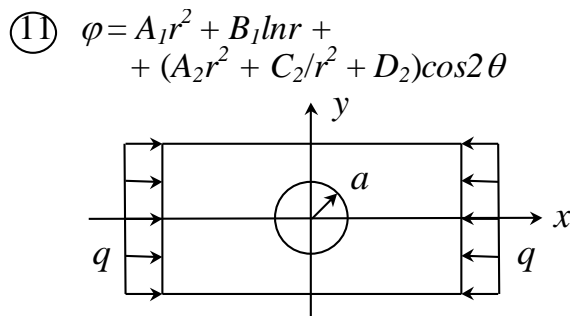
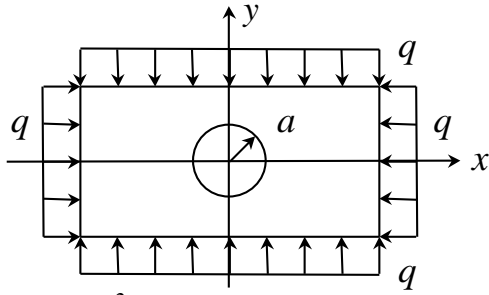


Рис. 4.1. Схемы к задаче 4



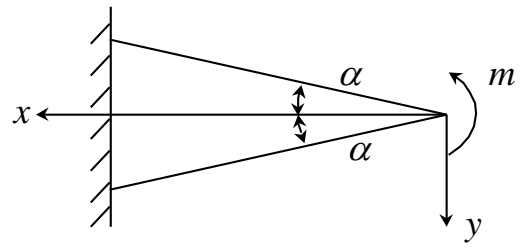
⑭

$$\varphi = Ar^2 + B \ln r$$



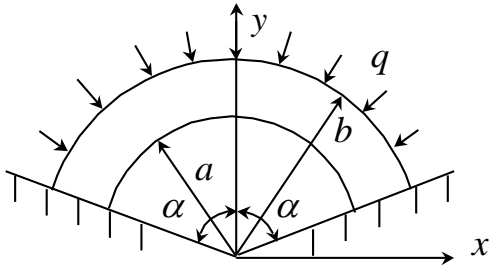
⑰

$$\varphi = A \sin 2\theta + B\theta$$



⑮

$$\varphi = Ar^2 + B \ln r$$



⑳

$$\varphi = A \sin 2\theta + B\theta$$

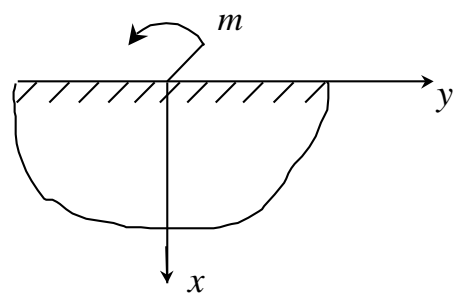
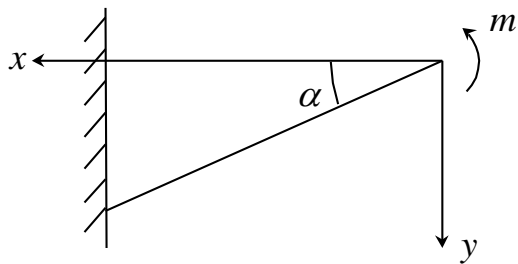


Рис. 4.1. Схемы к задаче 4 (продолжение)

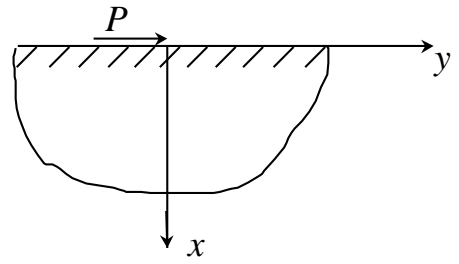
㉑

$$\varphi = A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + C\theta$$



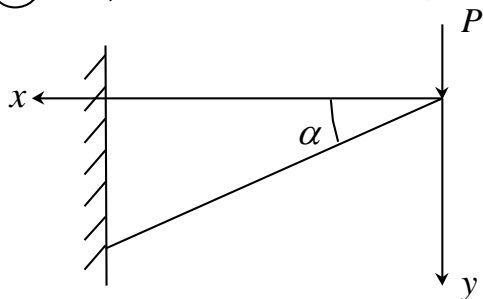
㉒

$$\varphi = r\theta(A \sin \theta + B \cos \theta)$$



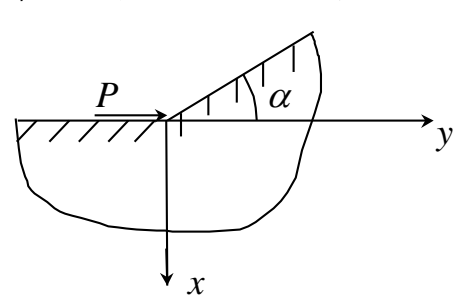
㉓

$$\varphi = r\theta(A \sin \theta + B \cos \theta)$$



㉔

$$\varphi = r\theta(A \sin \theta + B \cos \theta)$$



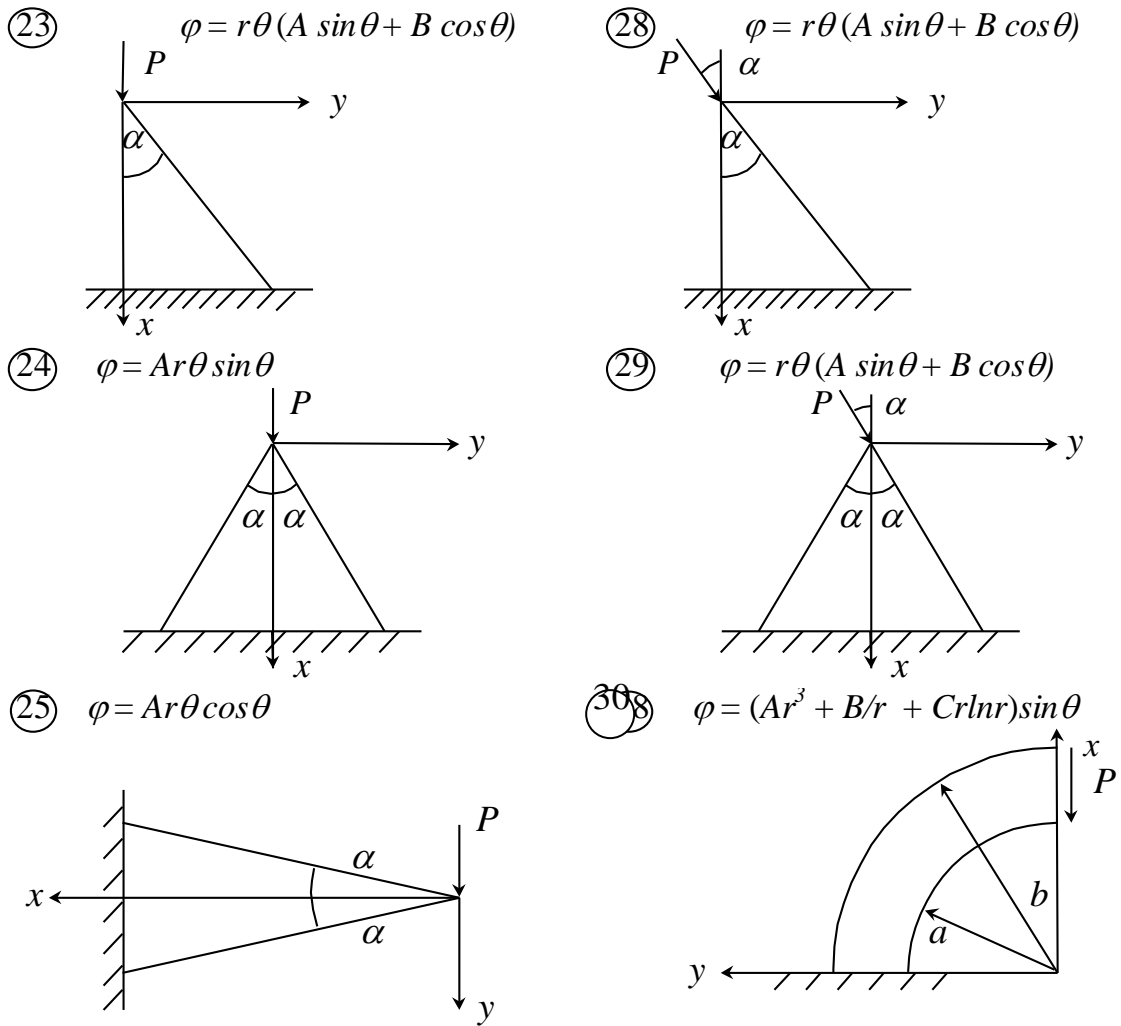


Рис. 4.1. Схемы к задаче 4 (окончание)

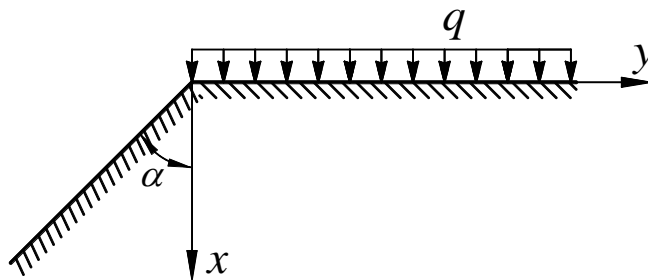


Рис. 4.2.

Бигармоническое уравнение записывается в развернутом виде с учетом полученных выражений для вторых производных:

$$\nabla^4 \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( 2A + 2C + 4D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 2A + 2C + 4D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = 4D \frac{1 \cdot (-y/x^2)}{1 + (y/x)^2} = -4D \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -4D \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = 4D \frac{y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( 2A + 2C + 4D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = 4D \frac{1 \cdot (1/x)}{1 + (y/x)^2} = 4D \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( 4D \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -4D \frac{x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Подстановка полученных соотношений в бигармоническое уравнение обращает его в тождество

$$\nabla^4 \varphi = 4D \frac{y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - 4D \frac{x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Следовательно, заданная функция напряжений является решением плоской задачи.

2. Записываются выражения для напряжений. С учетом отсутствия объемных сил

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2C + 2D \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right],$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2A + 2D \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( 2Ax + By + D \left[ 2x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y \right] \right) = \\ &= -\left( B + D \left[ 2x \frac{1 \cdot (1/x)}{1 + (y/x)^2} - 1 \right] \right) = -B - D \left( \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

окончательно

$$\tau_{xy} = -B - D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

3. Из граничных условий определяются постоянные  $A, B, C, D$ .

а) *Горизонтальная грань.* Геометрическое уравнение грани  $x = 0$ . Для этой грани направляющие косинусы

$$\begin{cases} l = \cos(\hat{\nu}, x) = \cos 180^\circ = -1, \\ m = \cos(\hat{\nu}, y) = \cos 90^\circ = 0, \end{cases}$$

проекции нагрузки на координатные оси  $q_x = q, q_y = 0$  (рис 4.3). Статические граничные условия

$$q_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m,$$

$$q_y = \tau_{yx} l + \sigma_y m$$

после подстановки формул для напряжений с учетом уравнения грани ( $\operatorname{arctg} \infty = \pi/2$ ) принимают вид:

$$q = \left( 2C + 2D \frac{\pi}{2} \right) \cdot (-1) + 0, \quad (1)$$

$$0 = (-B + D) \cdot (-1). \quad (2)$$

б) Наклонная грань. Геометрическое уравнение грани  $y = -x \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\alpha$ .

Направляющие косинусы

$$\begin{cases} l = \cos(\hat{v}, x) = \cos(90 + \alpha) = -\sin \alpha, \\ m = \cos(\hat{v}, y) = \cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha, \end{cases}$$

нагрузки  $q_x = q_y = 0$ . Аналогично горизонтальной грани записываются два уравнения:

$$\left( 2C + 2D \left[ -\alpha - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right] \right) (-\sin \alpha) + \left( -B - D \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \cdot (-\cos \alpha) = 0, \quad (3)$$

$$\left( -B - D \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \cdot (-\sin \alpha) + \left( 2A + 2D \left[ -\alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right] \right) \cdot (-\cos \alpha) = 0. \quad (4)$$

Совместное решение четырех уравнений дает выражения для постоянных

$$B = D = -\frac{q}{2} \cdot \frac{1}{\alpha + \pi/2 + 1/\operatorname{tg} \alpha}, \quad A = D\alpha, \quad C = -\frac{q}{2} - D \frac{\pi}{2}.$$

Выражения для напряжений после подстановки постоянных принимают окончательный вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -q \cdot \frac{\alpha + 1/\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{arctg}(y/x) + xy/(x^2 + y^2)}{\alpha + \pi/2 + 1/\operatorname{tg} \alpha}, \\ \sigma_y &= -q \cdot \frac{\alpha + \operatorname{arctg}(y/x) - xy/(x^2 + y^2)}{\alpha + \pi/2 + 1/\operatorname{tg} \alpha}, \quad \tau_{xy} = q \cdot \frac{x^2/(x^2 + y^2)}{\alpha + \pi/2 + 1/\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

4. Для проверки полученные выражения для напряжений подставляются в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0.$$

В рассматриваемом примере проекции объемных сил на координатные оси  $X = Y = 0$ , производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \left( \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} + \frac{y \cdot (x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \\ &= -\frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \left( \frac{-y(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{-x^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$



$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2 + y^2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \left( \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} - \frac{x \cdot (x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) =$$

$$= -\frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \left( \frac{x(x^2 + y^2) - x(x^2 + y^2) + xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -\frac{q}{\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \left( \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Подстановка производных показывает, что дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

5. Характерным сечением в данной задаче является горизонтальное сечение  $x = h$  (рис. 4.3). После подстановки этого значения в формулы для напряжений получаются соотношения для построения эпюр:

$$\sigma_x = -q \frac{\alpha + 1/\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{arctg}(y/h) + (y/h)/(1 + (y/h)^2)}{\alpha + \pi/2 + 1/\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\sigma_y = -q \cdot \frac{\alpha + \operatorname{arctg}(y/h) - (y/h)/(1 + (y/h)^2)}{\alpha + \pi/2 + 1/\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\tau_{xy} = q \cdot \frac{1}{\alpha + \pi/2 + 1/\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{1 + (y/h)^2}.$$

При этом из схемы задачи следует, что  $-\operatorname{tg} \alpha \leq y/h \leq \infty$ .

Для построения эпюр напряжений необходимо задаваться числовыми значениями величины  $k = y/h$ . На рис. 4.3 показаны эпюры напряжений, построенные при  $\alpha = 45^\circ = \pi/4$  по точкам  $k = y/h = -1; 0; 1; 2$ . При этом в формулы угол  $\alpha$  нужно подставлять в радианах. Для более точного выявления очертания эпюр необходимо брать точки чаще.

$$\text{При } k = y/h = -1, \quad \sigma_x = -0.149q, \quad \sigma_y = -0.149q, \quad \tau_{xy} = 0.149q;$$

$$k = y/h = 0, \quad \sigma_x = -0.532q, \quad \sigma_y = -0.234q, \quad \tau_{xy} = 0.298q;$$

$$k = y/h = 1, \quad \sigma_x = -0.915q, \quad \sigma_y = -0.319q, \quad \tau_{xy} = 0.149q;$$

$$k = y/h = 2, \quad \sigma_x = -0.981q, \quad \sigma_y = -0.445q, \quad \tau_{xy} = 0.060q.$$

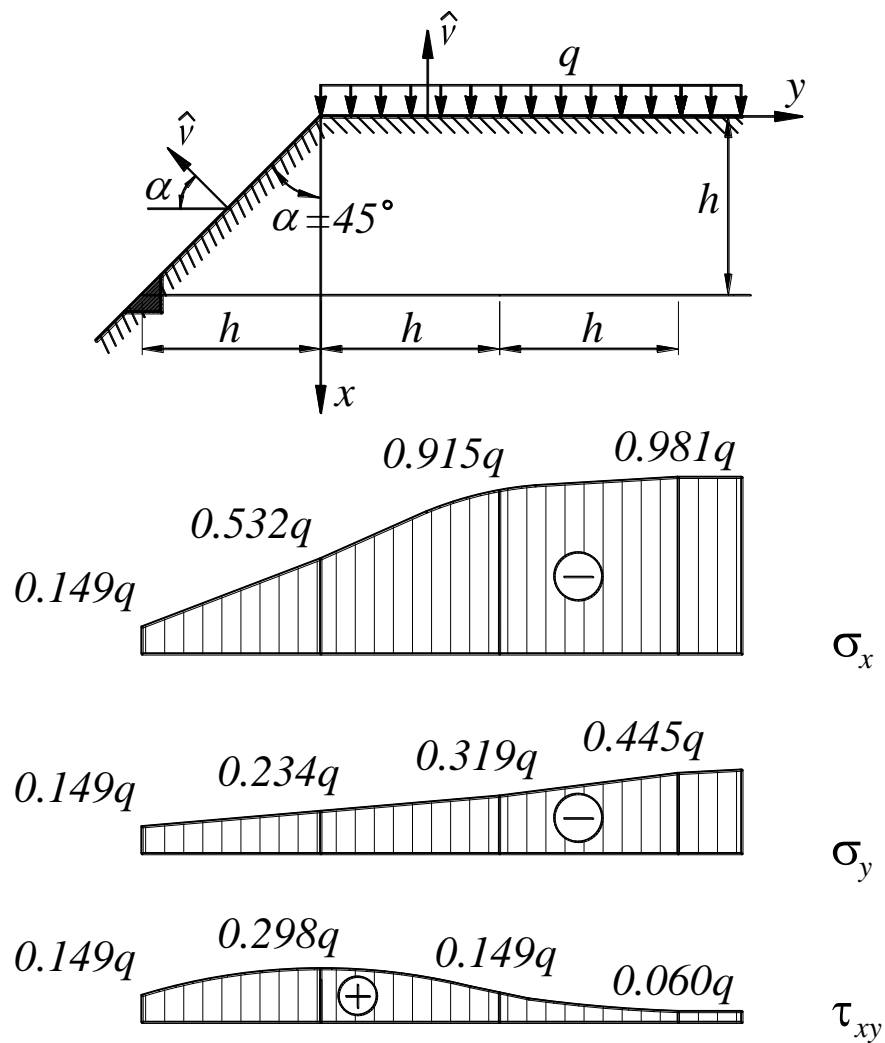


Рис. 4.3. Плоская задача теории упругости

Выполним проверку статических граничных условий на грани  $y = -xtg\alpha$ . Для этого рассмотрим дифференциально малый элемент тела, находящийся на поверхности в сечении  $x = h$  (рис. 4.4).

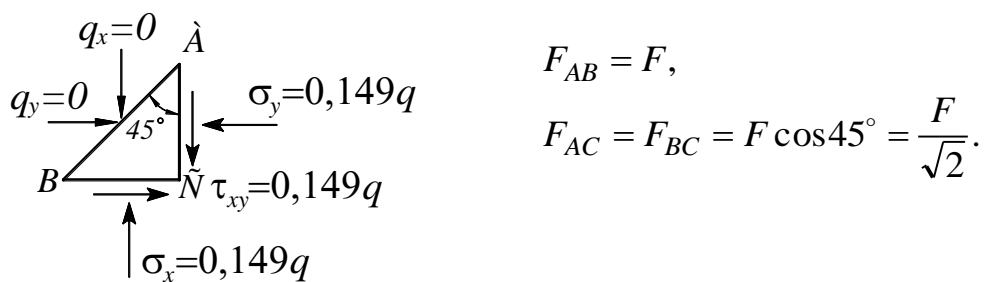


Рис. 4.4

Проекции сил, действующих на гранях материальной точки, на координатные оси

$$\sum x = 0, \quad \sum y = 0,$$

следовательно материальная точка находится в равновесии и эпюры напряжений построены верно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. М: Высшая школа, 1990. - 360 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М: Высшая школа, 1982. - 264 с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Издательство Наука, 1975. - 576 с.