МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Чувашский государственный университет имени И.Н.Ульянова»

Факультет строительный

Кафедра высшей математики и теоретической механики им. С.Ф. Сайкина

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры
«___» ________ 2017 г.,
протокол №__
Заведующий кафедрой

_________________ А.С.Сабиров

«__»________ 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по дисциплине

«Б1.Б.20 Математика»

Направление подготовки (специальность) 08.03.01 Строительство

Чебоксары - 2017

Методические рекомендации разработаны на основе рабочей программы дисциплины, предусмотренной образовательной программой высшего образования (ОП ВО) по направлению подготовки 08.03.01 Строительство.

СОСТАВИТЕЛИ:

Доцент кафедры высшей математики и
теоретической механики им. С.Ф. Сайкина,
кандидат физико-математических наук, доцент ___________________М.Е. Сироткина

СОГЛАСОВАНО:
Методической комиссией строительного факультета «30» августа 2017 г., протокол № 1

Декан факультета _______________________ __А.Н. Плотников

1. Методические указания обучающимся по выполнению самостоятельной работы

1.1 Значение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся является неотъемлемой частью образовательного процесса. Цель самостоятельной работы – подготовка современного компетентного специалиста и формирование способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

Реализация поставленной цели предполагает решение следующих задач:

- качественное освоение теоретического материала по изучаемой дисциплине, углубление и расширение теоретических знаний с целью их применения на уровне межпредметных связей;
- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических навыков;
- формирование умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- развитие познавательных способностей и активности, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самообразованию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие научно-исследовательских навыков;
- формирование умения решать практические задачи (в профессиональной деятельности), используя приобретенные знания, способности и навыки.

Основными формами организации самостоятельной работы студентов являются: аудиторная самостоятельная работа под руководством и контролем преподавателя (на лекциях, практических занятиях и консультациях); внеаудиторная самостоятельная работа под руководством и контролем преподавателя (на консультациях, при проведении научно-исследовательской работы), внеаудиторная самостоятельная работа без непосредственного участия преподавателя (подготовка к аудиторным занятиям, олимпиадам, конференциям, выполнение контрольных работ, работа с электронными информационными ресурсами, подготовка к экзаменам и зачетам).

Самостоятельная работа обучающихся по курсу «Математика» - необходимая составляющая подготовки специалиста в области строительства.

Внеаудиторная самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа обучающихся, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Целью самостоятельной работы обучающихся является овладение фундаментальными знаниями теории прогнозирования, профессиональными умениями и навыками проведения эконометрических расчетов, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа по курсу является залогом усвоения знаний и прохождения промежуточных аттестаций, предусмотренных рабочей программой по дисциплине. Ключевые цели самостоятельных внеаудиторных занятий заключается в закреплении, расширении знаний, формировании умений и навыков самостоятельного умственного труда, развитии самостоятельного мышления и способности к самоорганизации.

Выполняемая в процессе изучения дисциплины «Математика» учащимися самостоятельная работа является по дидактической цели познавательной и обобщающей; по характеру познавательной деятельности и типу решаемых задач – познавательной и исследовательской; по характеру коммуникативного взаимодействия учащихся – индивидуальной; по месту выполнения –домашней; по методам научного познания – теоретической.

В ходе организации самостоятельной работы студентов преподавателем решаются следующие задачи:

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- научить студентов овладевать приемами процесса познания;
- развивать у них самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности будущих специалистов

Самостоятельная работа включает как изучение текущих и дополнительных теоретических вопросов, так и совершенствование навыков по решению практических задач. Теоретические знания являются базой для понимания принципов построения математических моделей, математической формализации задач расчетного проектирования.

1.2 Общие рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Дисциплина «Математика» позволяет привить обучающимся навыки применения базовых математических понятий для построения математических моделей конкретных инженерных задач и последующего их решения. Поэтому обучающиеся должны опираться, в основном, на знания и умения, полученные на лекционных и практических занятиях. Это дает необходимый базис для дальнейшего углубленного изучения других дисциплин. Однако эти знания необходимо активизировать.

Формы самостоятельных работ обучающихся, предусмотренные дисциплиной:

• Подготовка к практическим занятиям;
• Самостоятельное изучение учебных вопросов;
• Выполнение расчетно-графической работы;
• Подготовка к зачету;
• Подготовка к экзамену.

Для самостоятельной подготовки к практическим занятиям, изучения учебных вопросов, подготовки зачету и экзамену можно рекомендовать следующие источники:

• конспекты лекций и материалы практических занятий;
• учебную литературу соответствующего профиля.

Преподаватель в начале чтения курса информирует студентов о формах, видах и содержании самостоятельной работы, разъясняет требования, предъявляемые к результатам самостоятельной работы, а также формы и методы контроля и критерии оценки.

1.3 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Практическое занятие – это одна из форм учебной работы, которая ориентирована на закрепление изученного теоретического материала, его более глубокое усвоение и формирование умения применять теоретические знания в практических, прикладных целях. Особое внимание на практических занятиях уделяется выработке учебных или профессиональных навыков. Такие навыки формируются в процессе выполнения конкретных заданий – упражнений, задач и т. п. – под руководством и контролем преподавателя. Ведущей целью практических занятий является формирование умений и приобретение практического опыта, направленных на формирование профессиональных компетенций (способности выполнять определенные действия, операции, необходимые в профессиональной деятельности) или общих компетенций (общие компетенции необходимы для успешной деятельности как в профессиональной, так и во внепрофессиональной сферах).

Содержанием практических занятий являются решение разного рода задач, в том числе профессиональных (анализ производственных ситуаций, решение ситуационных производственных задач, выполнение профессиональных функций в деловых играх и т.п.), выполнение вычислений, расчетов, чертежей, работа с измерительными приборами, оборудованием, аппаратурой, работа с нормативными документами, инструктивными материалами, справочниками, составление проектной, плановой и другой технической и специальной документации и другое.

Для подготовки к практическому занятию студенту необходимо изучить теоретический материал по данной теме, запомнить основные определения и правила, разобрать данные в лекциях решения задач. Для закрепления пройденного материала студенту необходимо выполнить домашнюю работу в соответствии с заданием, полученным на предыдущем практическом занятии. В случае возникновения затруднений при ее выполнении рекомендуется обратиться за помощью к преподавателю в отведенное для консультаций время.

Этапы подготовки к практическому занятию:

- изучение теоретического материала, полученного на лекции и в процессе самостоятельной работы;
- выполнение домашнего задания;
- самопроверка по контрольным вопросам темы.

1.4. Методические рекомендации по подготовке к лабораторным занятиям.

Лабораторные занятия не предусмотрены.

1.5 Методические рекомендации по самостоятельному изучению учебных вопросов

Темы, вынесенные на самостоятельное изучение, необходимо законспектировать. В конспекте кратко излагается основная сущность учебного материала, приводятся необходимые обоснования, табличные данные, схемы, эскизы, расчеты и т.п. Конспект целесообразно составлять целиком на тему. При этом имеется возможность всегда дополнять составленный конспект вырезками и выписками из журналов, газет, статей, новых учебников, брошюр по обмену опытом, данных из Интернета и других источников. Таким образом, конспект становится сборником необходимых материалов, куда студент вносит всё новое, что он изучил, узнал. Такие конспекты представляют, большую ценность при подготовке к занятиям.

Основные этапы самостоятельного изучения учебных вопросов:

1. Первичное ознакомление с материалом изучаемой темы по тексту учебника, картам, дополнительной литературе.
2. Выделение главного в изучаемом материале, составление обычных кратких записей.
3. Подбор к данному тексту опорных сигналов в виде отдельных слов, определённых знаков, графиков, рисунков.
4. Продумывание схематического способа кодирования знаний, использование различного шрифта и т.д.
5. Составление опорного конспекта.

1.6 Методические рекомендации по выполнению расчетно-графической работы

Цель расчетно-графической работы – систематизация и закрепление теоретических знаний и развитие практических навыков по решению задач, выработка навыков анализа статистических данных и формулирования выводов по полученным результатам.

Задачами расчетно-графической работы являются:

− развитие навыков самостоятельной работы в области решения практических задач;

− подбор и систематизация теоретического материала, являющегося основой для решения практической задачи, развитие навыков самостоятельной работы с учебной и методической литературой;

− проведение расчетов по исходным данным и анализ полученных значений;

− формулирование выводов по полученным результатам.

Структура расчетно-графической работы:

1. Титульный лист.
2. Оглавление.
3. Задание. На данном этапе надо полностью изложить данное обучающемуся задание.
4. Исходные данные. Студент предоставляет все существующие исходные данные, которые могут понадобиться для проведения расчетов.

5. Разделы, которые будут содержать практические решения и анализ полученных результатов.
6. Выводы.
7. Список использованных источников.
8. Приложение.

Требования по оформлению работы:

Набор текста производится в текстовом редакторе MicrosoftWord шрифтом TimesNewRoman размером 12 pt через 1,5 интервала или 14 pt через 1 интервал. Рекомендуемое значение поля страницы: левое – 30 мм, правое – 15 мм, верхнее и нижние 20 мм.

Нумерация страниц расчетно-графической работы должна быть сквозная.

Титульный лист не включается в общую нумерацию страниц.

Все иллюстрации, помещаемые в расчетно-графическую работу, должны быть тщательно подобраны, четко выполнены. Рисунки и диаграммы должны иметь прямое отношение к тексту, без лишних изображений и данных, которые не поясняются.

Тематика, выполнение и примерные задания расчетно-графических работ

I семестр

Примерная тематика расчетно-графических работ.

- решение систем линейных алгебраических уравнений;
- элементы векторной алгебры;
- аналитическая геометрия на плоскости;
- аналитическая геометрия в пространстве;
- предел числовой последовательности;
- предел функции;
- непрерывность функции.

Типовые задания РГР (очное отделение, очно-заочное отделение)

Раздел 1. Аналитическая геометрия с элементами линейной алгебры

1. Точки А (4; 5) и С (2; -1) являются двумя противоположными вершинами ромба, а прямая x-y+1=0 – одной из его сторон. Составить уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.
2. Даны координаты вершин некоторого треугольника *ABC:* *A*(6;2), *B*(30;–5), *C*(12;19). Найти:
   1) длину стороны *BC*;
   2) уравнение линии *BC*;
   3) уравнение высоты, проведенной из точки *A*;
   4) длину высоты, проведенной из точки *A*;
   5) площадь треугольника; угол *B*.
3. Дана матрица А. Найти матрицу A^{-1} обратную данной. Сделать проверку, вычислив произведение $A \cdot A^{-1}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
4. Применяя метод исключения неизвестных (метод Гаусса), решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

5. Написать разложение вектора $\mathbf{X}$ по векторам

$\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r}\cdot\ \mathbf{x}=\{-2,\ 4,\ 7\},\ \ \mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 2\},\ \ \mathbf{q}=\{1,\ 0,\ 1\},\ \ \mathbf{r}=\{-1,\ 2,\ 4\}.$

6. Найти косинус угла между векторами $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{AC}}$.

$$A(-2,\ 4,\ -6),\ \ B(0,\ 2,\ -4),\ \ C(-6,\ 8,\ -10).$$

7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+2\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=4,\ \ |\mathbf{q}|=3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=3\pi/4.$

8 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$$A_1(1,\ -1,\ 2),\ \ A_2(2,\ 1,\ 2),\ \ A_3(1,\ 1,\ 4),\ \ A_4(6,\ -3,\ 8).$$

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

$$A(2,\ 5,\ -3),\ \ B(7,\ 8,\ -1),\ \ C(9,\ 7,\ 4).$$

10. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2},\quad 2x+y+7z-3=0.$$

Раздел 2. Математический анализ

11. Вычислить пределы числовых последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}.$

12. Вычислить пределы числовых последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}.$$

13. Вычислить пределы числовых последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}.$$

14. Вычислить пределы функций: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}.$

15. Вычислить пределы функций: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}.$

16. Вычислить пределы функций: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}.$

17. Вычислить пределы функций: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x^2\cdot2^x}{1+x^2\cdot5^x}\right)^{1/\sin^3 x}.$

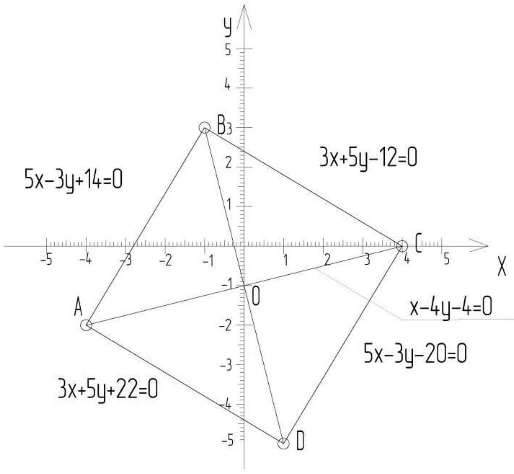
18. Вычислить пределы функций. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{e^{2x}-e^2}{x-1}\right)^{x+1}.$

19. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0: $f(x)=5x^2+5,\ \ x_0=8.$

20. Исследовать на непрерывность функцию, найти точки разрыва и установить их характер: $y=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2-9}, & x<0\\ 2^{(\frac{x}{4-x})}, & x\ge0\end{cases}$

Методические указания к решению РГР.

Задача 1. Прямые $5x$-$3y$+14 = 0 и $5x$-$3y$-20 = 0 являются сторонами ромба, а прямая x-$4y$-4 = 0 – его диагональю. Составить уравнения двух других сторон ромба. Сделать чертеж.



Решение.

1) Так как 5*x*-3*y*+14 = 0 и 5*x*-3*y*-20 = 0 $\Rightarrow$ прямые *AB* и *CD* параллельны. Из систем уравнений $\begin{cases} AB: 5x-3y+14=0 \\ AC:\ x-4y-4=0 \end{cases}$ находим координаты вершин x_A и y_A.

$\begin{cases} 5x-3y+14=0 \\ x-4y-4=0 \end{cases}$ $x=4y+4$

5(4*y*+4)-3*y*+14=0

20*y*+20-3*y*+14=0

17*y*+34=0

y=-2, тогда *x*=4*(-2)+4=-4.

Таким образом точка *A* имеет координаты *A* (-4;-2)

2) Из систем уравнений $\begin{cases} CD: 5x-3y-20=0 \\ AC: x-4y-4=0 \end{cases}$ находим координаты вершин x_c и y_c.

$\begin{cases} 5x-3y-20=0 \\ x-4y-4=0 \end{cases}$ x=4y+4

5(4*y*+4)-3*y*-20=0

20*y*+20-3*y*-20=0

17*y*=0

y=0, тогда *x*=4*(0)+4=4.

Таким образом точка *C* будет иметь координаты *C* (4;0).

3) Найдем координаты точки *O*:

OA=*OC* $\Rightarrow$

4-*x*=*x*+4; 2*x*=0; *x*=0

0-*y*=*y*+2; 2*y*=-2; *y*=-1

Таким образом точка *O* будет иметь координаты *O* (0;-1).

4) Составим уравнение прямой *BD*:

Представим прямую *BD* в виде : *ax*+*by*+*c*=0,

$AC \perp BD \Rightarrow$ разность произведения коэффициентов при *x* и *y* равно 0. То есть *a**1-4*b*=0, *a*=4*b*

Уравнение прямой в точке *O* (0;-1) примет вид 0-1*b*+*c*=0$\Rightarrow$*c*=*b*, тогда при подставлении в уравнение прямой *BD* *a*=4*b* и *c*=*b* уравнение примет вид

ax+*by*+*c*=0

4*bx*+*by*+*b*=0

4*x*+*y*+1=0 – уравнение прямой *BD*.

5) Так как $AB \cap BD$, то из системы уравнений $\begin{cases} AB: 5x-3y+14=0 \\ BD:\ 4x+y+1=0 \end{cases}$ находим координаты вершин $x_в$ и $y_в$.

$\begin{cases} AB: 5x-3y+14=0 \\ BD:\ 4x+y+1=0 \end{cases}$ y=-1-4x

5x+3+12x+14=0

17x+17=0

x=-1, тогда y= -1-4(-1)=3

Таким образом точка B будет иметь координаты B (-1;3)

6) Так как $CD \bigcap BD$, то из системы уравнений $\begin{cases} CD: 5x-3y-20=0 \\ BD:\ 4x+y+1=0 \end{cases}$ находим координаты вершин x_D и y_D.

$\begin{cases} CD: 5x-3y-20=0 \\ BD:\ 4x+y+1=0 \end{cases}$ y=-1-4x

5x+3+12x-20=0

17x-17=0

x=1, тогда y= -1-4(1)=-5

Таким образом точка D будет иметь координаты D (1;-5).

7) Составим уравнения стороны AD.

$\frac{x-1}{-4-1} = \frac{y+5}{-2+5}$

$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+5}{3}$

3x-3=-5y-25

3x+5y+22=0 (Уравнение стороны AD)

8) Составим уравнения стороны BC.

$\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y-0}{3-0}$

$\frac{x-4}{-5} = \frac{y-0}{3}$

3x-12=-5y

3x+5y-12=0 (Уравнение стороны BC)

Ответ: 3x+5y+22=0 (Уравнение стороны AD), 3x+5y-12=0 (Уравнение стороны BC)

Задача 2. Даны вершины треугольника ABC: $A(7;1)$, $B(-5;-4)$, $C(-9;-1)$. Найти:

1) длину стороны BC;
2) уравнение линии BC;
3) уравнение высоты, проведенной из точки A;
4) длину высоты, проведенной из точки A;
5) площадь треугольника;
6) угол B.

Решение.

1) Длину стороны BC находим, исходя из формулы

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-9+5)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{16+9} = 5 .$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, определяется по формуле

$$\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C},$$

согласно которой будем иметь искомое уравнение

$$\frac{x+9}{-5+9} = \frac{y+1}{-4+1}, \frac{x+9}{4} = \frac{y+1}{-3},$$

4y+4=-3x-27, 4y=-3x-27-4, 4y+3x+31=0

откуда после преобразований получим уравнение стороны BC:. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{31}{4}$.

3) Угловой коэффициент прямой BC согласно формулы $y = kx + b$ равен $k_{BC} = -\frac{3}{4}$. Так как $h = AD \perp BC$, то $k_{BC} \cdot k_{AD} = -1$, откуда $k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} = -1 * \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Составим уравнение высоты AD согласно формулы $y - y_A = k_{AD}(x - x_A)$. Подставив соответствующие координаты, будем иметь: $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 7)$

y-1 $= \frac{4x}{3} - \frac{28}{3}$,

3y-3=4x-28,

3y-4x+25=0 или $y = \frac{4}{3}x - 25$ (уравнение высоты AD).

4). Длину высоты AD находим согласно формулы для нахождения расстояния от точки A до прямой на плоскости:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

где $ax + by + c = 0$ – общее уравнение прямой на плоскости.

Тогда

$$d = \frac{|3x_A + 4y_A + 31|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3*7 + 4*1 + 31|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5}.$$

5). Площадь треугольника находим по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -5-8 & -4-1 \\ -9-7 & -1-1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -12 & -5 \\ -16 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|(24-80)| = 28.$$

6). Угол при вершине B треугольника ΔABC находим, используя формулу

$$tg\angle B = \frac{k_{BC} - k_{BA}}{1 + k_{BC} \times k_{BA}}.$$

Так как $k_{BA} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{7+5}{1+4} = \frac{12}{5}$, то $tg\angle B = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4} * \frac{12}{5}} = \frac{-\left(\frac{15+48}{20}\right)}{1 - \frac{36}{20}} = -\frac{63}{20} * \left(-\frac{20}{16}\right) = \frac{63}{16}$

или $\angle B = arctg\frac{63}{16}$.

Задача 3. Дана матрица А. Найти матрицу A^{-1} обратную данной. Сделать проверку, вычислив произведение $A \cdot A^{-1}$.

Решение.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Ее определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ =3*(1(-1)-5*(-3))-4(2*1-1*(-3))+2*(10+1)=3*(-1+15)-4*(2+3)+2*(10+1)=42-20+22=44$\neq 0$, следовательно матрица невырожденная и имеет единственную обратную матрицу, определяемую по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{pmatrix}$.

Запишем алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 15 = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 10 = 6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10+1=11 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-15+4=-11, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-8=-11.$$

Тогда:

$$A^{-1}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}14 & 6 & -10\\ -5 & 1 & 13\\ 11 & -11 & -11\end{pmatrix}.$$

Проверка:

C_{11}=3*14+4*(-5)+2*11=44;
C_{12}=3*6+4*1+2*(-11)=0;
C_{13}=3*(-10)+4*(13)+2*(-11)=0;
C_{21}=2*14+(-1)*(-5)+(-3)*11=0;
C_{22}=2*6+(-1)*1+(-3)*(-11)=44;
C_{23}=2*(-10)+(-1)*(13)+(-3)*(-11)=0;
C_{31}=1*14+5*(-5)+1*11=0;
C_{32}=1*6+5*1+1*(-11)=0;
C_{31}=1*(-10)+5*(13)+1*(-11)=44.

$$A*A^{-1}=\frac{1}{44}\begin{vmatrix}44 & 0 & 0\\ 0 & 44 & 0\\ 0 & 0 & 44\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\mathrm{E}$$

Задача 4. Применяя метод исключения неизвестных (метод Гаусса), решить систему линейных уравнений.

Решение. Рассмотрим систему
$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3+x_4=-2,\\ 2x_1-x_3+3x_4=4,\\ x_1-2x_2+x_4=-3,\\ 4x_1-3x_2+2x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

Выполним элементарные (строчные) преобразования над расширенной матрицей:

$$C=\left(\begin{array}{cccc|c}3 & -1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3\\ 4 & -3 & 2 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}4 & -3 & 2 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}4 & -3 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 2 & -2 & -2\\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 5 & 2 & -2 & 12\\ 0 & 5 & 2 & -2 & 7\\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3\end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 5 & 2 & -2 & 7\\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3\end{array}\right).$$

Так как выражение 0=5 не верно, то система не совместима и решений не имеет.

Задача 5. Даны векторы ***a*** = (1;7;3), ***b*** = (3;4;2), ***c*** = (4; 8;5), ***d*** = (7; 32; 14) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора ***d*** в этом базисе.

Решение.

Если векторы ***a*** = (1;7;3), ***b*** = (3;4;2), ***c*** = (4; 8;5) образуют базис, то смешанное произведение этих векторов не равно нулю. Проверим это:

$$\begin{vmatrix}1 & 7 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 8 & 5\end{vmatrix}=1*(20-16)-7*(15-8)+3*(24-16)=20-16-105+56+72-48=-21\neq 0.$$

Следовательно, вектор ***d*** линейно выражается через базисные векторы ***a***, ***b***, ***c***. Тогда требуется найти такие три числа α, β, γ, чтобы имело место равенство $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$

или $\begin{cases} 7 = \alpha + 3\beta + 4\gamma, \\ 32 = 7\alpha + 4\beta + 8\gamma, \\ 14 = 3\alpha + 2\beta + 5\gamma. \end{cases}$

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 16 - 3*(35-24) + 4*(14-12) = 20 - 16 - 105 + 72 + 56 - 48 = -21 \neq 0$,

то система уравнений имеет единственное решение. Воспользуемся правилом Крамера:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}; \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}; \quad \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta},$$

где

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 32 & 4 & 8 \\ 14 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7*(20-16) - 3*(160-112) + 4*(64-56) = 140 - 112 - 480 + 336 + 256 - 224 = -84,$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & 32 & 8 \\ 3 & 14 & 5 \end{vmatrix} = 160 - 112 - 245 + 168 + 392 - 384 = -21,$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 32 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 56 - 64 - 42 + 36 + 98 - 84 = 0.$$

Тогда $\alpha = \frac{-84}{-21} = 4, \quad \beta = \frac{-21}{-21} = 1, \quad \gamma = 0$.

Таким образом разложение имеет вид $\boldsymbol{d} = 4\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Проверка: Подставим значения $\alpha = 4, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0$ в равенство $\begin{cases} 7 = \alpha + 3\beta + 4\gamma, \\ 32 = 7\alpha + 4\beta + 8\gamma, \\ 14 = 3\alpha + 2\beta + 5\gamma. \end{cases} \begin{cases} 4 + 3 = 7 \\ 7*4 + 4 = 32 \\ 12 + 2 = 14. \end{cases}$

Ответ: координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будет иметь вид $\boldsymbol{d} = 4\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Задача 6. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$A(1,-2,3), \quad B(3,4,-6), \vdots C(1,1,-1).$

$\overline{AB} = \{4,2,-3\}, \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}.$

$\overline{AC} = \{2,-1,2\}, \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3.$

$\cos(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = \dfrac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{29}} = 0.$

$(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = \dfrac{\pi}{2}.$

Задача 7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q},$

$\vec{b} = 5\vec{q} + \vec{p}.$

$$\left|p\right| = \frac{1}{2}, \left|\vec{q}\right| = 4, (\vec{p}\wedge\vec{q}) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$S = \left|(6\vec{p} - q)\times(5\vec{q} + \vec{p})\right| = \left|6\vec{p}\times 5\vec{q} + 6\vec{p}\times\vec{p} - 5\vec{q}\times\vec{q} - \vec{q}\times\vec{p}\right| = \left|6\vec{p}\times 5\vec{q} + \vec{p}\times\vec{q}\right| =$$

$$= 31\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin(\vec{p}\wedge\vec{q}) = 31\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sin\frac{5\pi}{6} = 31\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 31.$$

Задача 8. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1, A_2, A_{3,} A_4$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$A_1(0,-1,-1)$,

$A_2(-2,3,5)$,

$A_3(1,-5,-9)$,

$A_4(-1,-6,3)$.

$\overline{A_1A_2} = \{-2,4,6\}$,

$\overline{A_1A_3} = \{1,-4,-8\}$,

$\overline{A_1A_4} = \{-1,-5,4\}$.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -8 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\left|32 - 30 + 32 - 24 + 80 - 16\right| = \frac{74}{6}.$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3}\cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S}.$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-8i - 10j + 4k\right| = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 100 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{180} = \sqrt{45}.$$

$$h = \frac{3\cdot 74}{6\cdot\sqrt{45}} = \frac{37}{\sqrt{45}}.$$

Задача 9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

$A(0,-2,8)$,

$B(4,3,2)$,

$C(1,4,3)$.

$$\overline{BC} = \{-3,1,1\}.$$

Т.к. вектор $\overline{BC} \perp$ искомой плоскости, то его можно взять в качестве вектора нормали, следовательно

$-3(x - 0) + (y + 2) + (z - 8) = 0$,

$-3x + y + z - 6 - 0.$

Задача 10. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2},$$
$$x+2y-z-2=0,$$
$$\begin{cases} x=-t-2, \\ y=t+1, \\ z=2t-3. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости

$$(-t-2)+2(t+1)-(2t-3)-2=0,$$
$$-t-2+2t+2-2t+3-2=0,$$
$$-t+1=0,$$
$$t=1.$$

Таким образом, координаты искомой точки $(-3,2,-1)$.

Раздел 2.

Задача 11. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(36-12n+n^2)-(36+12n+n^2)}{(36+12n+n^2)-(1-2n+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-24n}{14n+35}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-24}{14+35/n}=-\frac{24}{14}=-\frac{12}{7}.$$

Задача 12. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^9}}+7}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^{11}}+\frac{1}{n^{12}}}-\frac{1}{n^2}}=7.$$

Задача 13. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot(n+1)}=$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+2/n}{2+1/n}}=e.$$

Задача 14 . Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{(x-1)^2(x+3)^2}{x(x+1)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+1)}=0.$$

Задача 15 . Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix} x-1=y \\ y\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{y\to0}\frac{(y+1)^2-1}{\ln(y+1)}=\lim_{y\to0}\frac{y^2+2y}{y}=\lim_{y\to0}(y+2)=2.$$

Задача 16 . Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x\to0}\frac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(7^{3x}-1)-(3^{2x}-1)}{x+x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3x\ln7-2x\ln3}{x^2+1}=0.$$

Задача 17. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{3x}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1.$$

Задача 18. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{1}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Задача 19 . Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$).

$f(x) = 2x^2 - 4, x_0 = 3.$

$|f(x) - f(x_0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$,

$\left|2x^2 - 4 - (2\cdot 9 - 4)\right| = \left|2x^2 - 18\right| = 2\left|x^2 - 9\right| < \varepsilon$,

$\left|x^2 - 9\right| < \varepsilon/2,$

$|(x-3)(x+3)| < \varepsilon/2 \Rightarrow |x-3| < \varepsilon/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon/2.$

Задача 20. Задана функция *y=f(x)*. Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \pi, \\ x - 2, & x > \pi. \end{cases}$$

1. Неэлементарная функция $f(x)$ определена для всех значений. Она может иметь разрыв только в точках x=0 и $x=\pi$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $f(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

1) Исследуем точку $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} -x = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x) = 0$.

Согласно условию, значение функции $f(x)$ в точке $x = 0$ определяется первой формулой $f(0) = -0 = 0$, следовательно, в точке $x = 0$ выполняются все условия непрерывности функции: функция определена в окрестности точки $x = 0$ и

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = f(0).$$

Поэтому в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

2) Исследуем точку $x = \pi$:

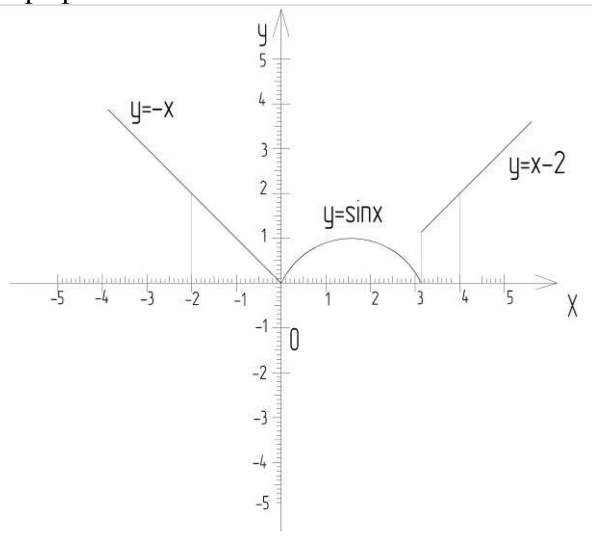
$\lim\limits_{x\to \pi-0} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi-0} (\sin x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to \pi+0} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi+0} (x-2) = \pi - 2 \approx 1{,}14 \Rightarrow$ функция в точке π имеет разрыв.

Здесь левый и правый пределы функции конечны, но различны, т.е. не выполняется условие непрерывности. Поэтому в точке $x = \pi$ функция имеет разрыв (конечный скачок), который равен:

$$\left|\lim_{x\to\pi+0} f(x) - \lim_{x\to\pi-0} f(x)\right| = |\pi - 2 - 0| \approx 1{,}14$$

Построим схематический график:



II семестр

Примерная тематика расчетно-графических работ.

- дифференцирование функции одной переменной;
- элементы векторной алгебры;
- исследование функций и построение графиков;
- функции нескольких переменных;
- неопределенные интегралы;
- определенный интеграл и его приложения;
- дифференциальные уравнения.

Типовые задания РГР (заочная форма обучения)

Раздел 2. Математический анализ

1. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций.

   1) $y = \arccos\sqrt{x}$. 2) $y = \ln ctg\,\dfrac{x}{3}$

   3) $x = 2t^2 + t, \quad y = \ln t$.

2. Найти пределы функции, применяя правило Лопиталя.

   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}.$$

3. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию *y* = *f(x)* и по результатам исследования построить ее график

а) $y = \frac{4x}{4+x^2}$, б) $y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

4. Дана функция двух переменных $Z = f(x;y)$. Найти все частные производные первого и второго порядков.

$Z = \frac{y}{x^2 - y^2}$

5. Дана функция. Выяснить, имеет ли эта функция экстремум и определить максимум или минимум

$Z = x^2 - y^2 + 3xy + 7$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f\ (x;\ y)$ в ограниченной замкнутой области D. Область D изобразить на чертеже.

$Z = x^2 - y^2 + 3xy + 7$;

D: $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

7. Даны: функция трех переменных $u=f(x,y,z)$, точка $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ и вектор $\vec{l}$ $(a_1,\ a_2,,\ a_3)$.

Найти:

1) производную в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$;

2) $grad\ u$ в точке M_0.

$u = \sqrt{x^2 - 2y + 4z}$; $M_0(1; -2; 1)$;

$\vec{a}$ (-1; 2; 2)

8 Найти неопределенные интегралы

а) $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$; *б*) $\int x arctgx dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + 27}$; *г*) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$; *д*) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

9. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится

$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx.$

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

$x^2 + 2y = 0,\qquad 5x + 2y - 6 = 0$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$$

$x = 1 (x \ge 1).$

11. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \le x \le \frac{8}{9}$

12. Вычислить двойной интеграл по области D . Область интегрирования D изобразить на чертеже. Решить задачу вторым способом поменяв порядок интегрирования.

$$\iint\limits_D (xy - y + 1)dxdy; \quad D: y = x^2,\ y = 2 - x^2$$

13. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного данными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy $z = 0$, $z - x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $x = \sqrt{25 - y^2}$.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения

14. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$

15. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.
$$y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$$

16. Найти решение задачи Коши.
$$y' - y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ y(0) = 0.$$

17. Найти общее решение дифференциального уравнения.
$$y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

18. Найти решение задачи Коши.
$$y'' = 72y^3,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 6.$$

19. Найти общее решение дифференциального уравнения.
$$y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x.$$

20. Найти решение задачи Коши.
$$y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x,\ y(\pi/4) = 3,\ y'(\pi/4) = 2.$$

Методические указания к решению РГР.

Задача 1. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций.

1) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\sin x;$.

$$(ctg^2 x)^1 = 2ctgx * (ctgx)^1 = 2ctgx\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$(\ln\sin x)^1 = \frac{1}{\sin x} * (\sin x)^1 = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}2ctgx\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) - \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{ctgx}{\sin^2 x} + ctgx = ctgx(1 - \frac{1}{\sin^2 x}).$$

2) $y = \exp(\cos 3x) = e^{\cos 3x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos 3x}(\cos 3x)^1 = e^{\cos 3x}(-\sin 3x)(3x)^1 = -3\sin 3x * e^{\cos 3x}.$$

3) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \dfrac{1}{\sin^2 t}$..

$$y_x^1=\frac{y_t^1}{x_t^1}=\frac{1+\frac{1}{\cos t}(-\sin t)}{1-\frac{1}{\sin t}\cos t}=\frac{1-\frac{\sin t}{\cos t}}{1-\frac{\cos t}{\sin t}}=\frac{1-tgt}{1-ctgt}$$

$$x=tgt \quad y=\frac{1}{\sin^2 t}$$

$$y^1{}_x=\frac{y_t^1}{x_t^1}=\frac{(tgt)^1}{\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right)^1_t}=\left|\left(\frac{C}{f}\right)^1=-\frac{Cf^1}{f^2}\right|=-\frac{(\sin^2 t)^1}{\sin^4 t}=-\frac{2\sin t\cos t}{\sin^4 t}=-\frac{2\cos t}{\sin^3 t}$$

$$y^1{}_x=\frac{1}{\cos^2 t}*\left(-\frac{\sin^3 t}{2\cos t}\right)=-\frac{\sin^3 t}{2\cos^3 t}=-\frac{1}{2}tg^3 t$$

Задача 2. Найти пределы функции, применяя правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}x^3\ln x.=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^1}{\left(\frac{1}{x^3}\right)^1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}*\frac{x^4}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3}=0$$

Задача 3. Методами дифференциального исчисления: а) исследовать функцию *y = g(x)* для $\forall x\in R$ и по результатам исследования построить ее график; б) Найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке [0; 1].

а) $g(x)=(x-1)^{3x+1}$,

1) Область определения $x\in(-\infty;\infty)$.

2) Функция непериодическая.

3) Четность/нечетность $g(-x)=(-x-2)^{-3x+1}\neq -g(x)\neq g(x)$ - функция общего вида, то есть не четная ни не четная.

4) Точки пересечения с осью OX:

$y = 0$ *x-1* = 0, x=1   (1;0)

3x+1 ≠ 0

с осью OY: $x = 0$; $y=-1^1=-1$;   (0;-1)

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{3x+1}=\left\{\begin{matrix}\textit{по}\\ \textit{правилу}\\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}$$

5) Экстремумы, возрастание, убывание

$$g'(x) = (3x+1) + (x-1)^{3x+1} = 0$$
$$3x+1+3(x-1)\ln(x-1) = 0$$
$$x + \frac{1}{3} + x\ln(x-1) - \ln(x-1) = 0$$
$$\text{g(x) = (x -1)}^{3x+1} = (x-1)(x-1)^{3x}$$
$$\text{g(x) = (x -1)}^{3x+1} = \left((x-1)(x-1)^{3x}\right)^1 = (x-1)^1(x-1)^{3x} + (x-1)\left[(x-1)^{3x}\right] =$$
$$\left|\begin{array}{l} \left(f(x)^{g(x)}\right)^1 = f(x)^{g(x)}\left(g^1(x)\ln f(x) + \dfrac{g(x)f^1(x)}{f(x)}\right) \Rightarrow \\ \left((x-1)^{3x}\right)^1 = (x-1)^{3x}\left(3\ln(x-1) + \dfrac{3x}{x-1}\right) = 3(x-1)^{3x}\ln(x-1) + \dfrac{3x(x-1)^{3x}}{x-1} = \\ = 3(x-1)^{3x}\ln(x-1) + 3x(x-1)^{3x-1} \end{array}\right|$$
$$= (x-1)^{3x} + (x-1)(3(x-1)^{3x}\ln(x-1) + 3x(x-1)^{3x-1}) = (x-1)^{3x} + 3(x-1)^{3x+1}\ln(x-1) + 3x(x-1)^{3x} =$$
$$(x-1)^{3x}(1 + 3(x-1)\ln(x-1) + 3x)$$
$$g^1 x = 0 \qquad (x-1)^{3x} = 0 \;\text{ или }\; 1 + 3(x-1)\ln(x-1) + 3x = 0$$
$$x = 1\text{или}\;\; 1 + 3(x-1)\ln(x-1) + 3x = 0$$
$$1 + 3\ln(x-1)^{(x-1)} + 3x = 0$$
$$\frac{1}{3} + \ln(x-1)^{(x-1)} + x = 0$$
$$\ln(x-1)^{(x-1)} = -\frac{1}{3} - x$$
$$(x-1)^{(x-1)} > 0$$
$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$x = 1$$
$$g(1) = (1-1)^{3*1+1} = 0^4 = 0$$

x	$(-\infty; 1]$	$[1; \infty)$
g'	Неопред.	+
g	Не возрастает, не убывает	возрастание

$x_{\min} = 1; \quad y_{\min} = 0$

6) Выпуклость/вогнутость

$$g'^1(x) = (3x+1) + (x-1)^{3x+1} \cdot x = 0$$

$$x = 0 - \textit{точка перегиба}$$
$$x \in (-\infty;\, 0) \to y'' < 0 - \textit{выпуклость}$$
$$x \in (\,0;\, \infty) \to y'' > 0 - \textit{вогнутость}$$

7) Вертикальных асимптот нет

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ - следовательно наклонных асимптот тоже нет.

Задача 4. Дана функция двух переменных $z = \arcsin\dfrac{y}{x^2}$. Найти все частные производные первого и второго порядков.

Решение. Вычислим первые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\arcsin\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2})^1=|y=const|=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}*\left(\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}*\left(x^{-2}\right)^1=\frac{y}{\frac{1}{x^2}\sqrt{x^4-y^2}}*\left(-2x^{-3}\right)=$$

$$=\frac{-2y}{\frac{x^3}{x^2}\sqrt{x^4-y^2}}=-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\arcsin\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2}\right)^1=|x=const|=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}*\left(\frac{y}{x^2}\right)_y=\frac{y}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^4}}}*\left(\frac{y}{x^2}\right)_y^1=\frac{y}{x^2\sqrt{\frac{x^4-y^2}{x^4}}}*\left(y\right)^1=$$

$$=\frac{1}{\frac{x^2}{x^2}\sqrt{x^4-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}$$

Дифференцируя полученные частные производные по переменным x и y соответственно, получаем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(-\frac{2y}{x\sqrt{x^4-y^2}}\right)^1=\left(-2yx^{-1}\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^1=-2y\left(x^{-1}\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^1=$$

$$=-2y\left[\left(x^{-1}\right)^1\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}\left(\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^1\right]=$$

$$=-2y\left[-x^{-2}\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^4-y^2\right)^1\right]=-2y\left(-\frac{1}{x^2\sqrt{x^4-y^2}}-\frac{4x^3}{2x\left(\sqrt{x^4-y^2}\right)^3}\right)=,$$

$$=\frac{2y}{x^2\sqrt{x^4-y^2}}-\frac{4x^2}{2\left(\sqrt{x^4-y^2}\right)^3}=\frac{2}{\sqrt{x^4-y^2}}\left(\frac{y}{x^2}-\frac{2x^2}{2\left(x^4-y^2\right)}\right)=\frac{2}{\sqrt{x^4-y^2}}\left(\frac{y}{x^2}-\frac{x^2}{x^4-y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-y^2}}\right)_y^1=\left((x^4-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)_y^1=-\frac{1}{2}\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^4-y^2\right)_y^1=-\frac{1}{2}\left(x^4-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-2y\right)=,$$

$$=\frac{y}{\left(\sqrt{x^4-y^2}\right)^3}$$

Задача 5. Дана функция Z = 3x^2 – 3xy +y^2 + 1. Найти экстремум и определить, является он максимумом или минимумом.

Решение. Находим координаты стационарной точки:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=6x-3=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y-3=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0{,}5,\\ y=1{,}5.\end{cases}$$

Находим значения частных производных второго порядка в этой точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6>0;\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2;\quad\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=0;$$

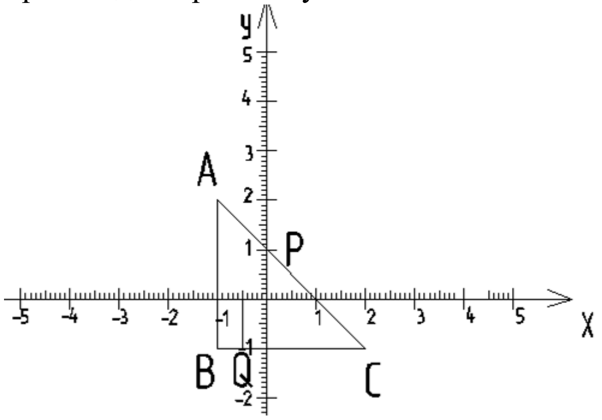
$$\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2=6*2-0=12>0$$

$$\textit{Т.к.}\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6>0\quad\textit{и}\quad\Delta>0,\quad\textit{то в точке}\ (0{,}5{,}1{,}5)-\textit{минимум}$$

$$z_{\min}(0{,}5;1{,}5) = 3(0{,}5)^2 - 3*0{,}5*1{,}5 + 1{,}5^2 + 1 = 0{,}75 - 2{,}25 + 2{,}25 + 1 = 1{,}75\,.$$

Задача 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции Z = $3x^2 - 3xy + y^2 + 1$ в ограниченной замкнутой области D. Область D изобразить на чертеже.

Решение. Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, могут находиться как внутри области, так и на ее границе. Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то в этой точке частные производные равны нулю:



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 3y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 3x.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 6x - 3y = 0, \\ 2y - 3x = 0, \end{cases} \quad y = \frac{6x}{3} = 2x$$

4x-3x=0

x=0

y=2*0=0 $O(0;0) \in D$

Перейдем к исследованию функции на границе области.

На отрезке *AB* имеем *x*=-1 и поэтому на этом отрезке функция $z = 3 + 3y + y^2 + 1 = y^2 + 3y + 4$ есть возрастающая функция от одной переменной *y*. Наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка *AB*. Находим производную $\left(y^2 + 3y + 4\right)' = 2y + 3$.

$2y + 3 = 0 \Rightarrow y = -1{,}5$. $\Rightarrow$точка не принадлежит области D.

На отрезке *AC* имеем *y* = -1. Поэтому на отрезке *AC* функция $z = 3x^2 + 3x + 1 + 1 = 3x^2 + 3x + 2\ (-1 \le y \le 2)$ представляет собой функцию одной переменной x. Наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка *AC*.

Находим производную $\left(3x^2 + 3x + 2\right)' = 6x + 3$.

$6x + 3 = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$. $\Rightarrow$точка принадлежит области D. Отсюда получаем точку Q (-0,5;-1) на отрезке AC.

На отрезке BC x+y=1, y=1-x

$z = 3x^2 - 3x(1 - x) + (1 - x)^2 + 1 =$.

Находим производную $\left(7x^2 - 5x + 2\right)' = 14x - 5$.

$14x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{14}, y = 1 - x = \frac{9}{14}$. $\Rightarrow$точка принадлежит области *D*. Отсюда получаем точку P ($\frac{5}{14}; \frac{9}{14}$) на отрезке *BC*.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 - 3xy + y^2 + 1$ в замкнутой области находятся среди ее значений в точках *A,B,C,Q и P* т.е. среди значений

z(*A*) = z(-1;-1) = 3-3+1+1=2,

z(*Q*) = z(– 0,5;–1) = 0,75-1,5+1+1=1,25

z(*B*) = z(-1;2) = 3+6+4+1=14.

z(*C*) = *z*(2;-1) = 12+6+1+1=20

$$z(P) = z(\frac{5}{14};\frac{9}{14}) = 3*\left(\frac{5}{14}\right)^2 - 3*\frac{5}{14}*\frac{9}{14} + \left(\frac{9}{14}\right)^2 + 1 \approx 1{,}107$$

Наибольшее и наименьшее значения равны соответственно 20 и 1,107. Они и являются наибольшим и наименьшим значениями данной функции в данной замкнутой области: $z_{max} = 20; \quad z_{min} = 1{,}107.$

Задача 7. Найти производную функции $u = \ln|10 - x^2 - y^2 - z^2|$ по направлению вектора $\vec{a} = \{-4;0;3\}$

а) в любой точке и в точке M (2; 2; 1).

б) Определить **grad** $\boldsymbol{u}$ в точке M.

Решение. Найдем частные производные функции u и направляющие косинусы вектора $\vec{l}$:

$$u'_x = \frac{1}{|10 - x^2 - y^2 - z^2|}\left|10 - x^2 - y^2 - z^2\right| = \frac{-2x}{|10 - x^2 - y^2 - z^2|}, \quad u'_y = \frac{-2y}{|10 - x^2 - y^2 - z^2|},$$

$$u'_z = \frac{-2z}{|10 - x^2 - y^2 - z^2|},$$

$$\cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{16+0+9}} = -\frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{0}{5} = 0, \quad \cos\gamma = \frac{3}{5}.$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \vec{N}\cdot\vec{l}^{\,0},$$

где $\boldsymbol{N} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ –нормальный вектор к поверхности уровня, $\vec{l}^{\,0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор направления $\vec{l}$.

а) Найдем производную функции u по направлению вектора $\vec{l}$ в любой точке:

$$u'_a = \frac{-2x}{|10 - x^2 - y^2 - z^2|}\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{-2y}{|10 - x^2 - y^2 - z^2|}*0 + \frac{-2z}{|10 - x^2 - y^2 - z^2|}*\frac{3}{5} = \frac{8x - 6z}{5|10 - x^2 - y^2 - z^2|}$$

M_0 (2; 2; 1)

б) Подставляя координаты точки A, получим:

$$u'_l(A) = \frac{8*2 - 6*1}{5|10-4-4-1|} = \frac{16-6}{5} = 2\,.$$

Находим градиент функции в точке A:

$$\mathbf{grad}\; u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

$$\mathbf{grad}\; u\big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{M_0}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{M_0}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,|_{M_0}\vec{k}.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{M_0} = \frac{-2*2}{|10-4-4-1|} = \frac{-2*2}{1} = -4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{M_0} = \frac{-2*2}{1} = -4, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\,|_0 = \frac{-2*1}{1} = -2,$ тогда

$$\mathbf{grad}\; u\big|_{M_0} = -4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Задача 8. Найти неопределенные интегралы.

а)

$$\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^3 x}} = \left\{\begin{matrix}\sin x = U \\ dU = -\cos x dx\end{matrix}\right\} = \int\frac{1}{\sqrt{U^3}}du = \int U^{-\frac{3}{2}}du = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}U^{-\frac{3}{2}+1} + C =$$

$$= -2U^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{U}} + c = |U = \sin x| = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + c$$

б)

$$\int x\ \arccos\frac{1}{x}dx; = \left\{\begin{matrix} \textit{Интегрирование по частям} \\ \int udv = uv - \int vdu \\ u=\frac{1}{x}; \qquad x=\frac{1}{U} \\ du=-\frac{1}{x^2}dx; \quad dx=-\frac{1}{x^2}du; \end{matrix}\right\} = \int -\frac{\arccos U\ \ dU}{U*U^2} = -\int\frac{\arccos U}{U^3}dU =$$

$$= \left|\begin{matrix} \int Fdv = Fv-\int vdF \\ \arccos U = F \qquad dv=\frac{dU}{U^3} \\ dF=(F)^1=-\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}dU \\ v=\int\frac{du}{u^3}=\int U^{-3}du=-\frac{1}{2}U^{-2}=-\frac{1}{2\sqrt{U^2}} \end{matrix}\right| = -\int\left(\arccos U\left(\frac{1}{2U^2}\right)-\int\left(-\frac{1}{2}U^{-2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}\right)\right)dU =$$

$$= \frac{\arccos U}{2U^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{U^2\sqrt{1-U^2}}dU = \frac{\arccos\frac{1}{x}}{2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{x^2}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \left|\int\frac{xdx}{(x^2-a^2)}=\sqrt{x^2-a^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(x^2\arccos\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

в) $$\int\frac{(2x+1)dx}{x^3+3x^2-4x} = \int\frac{(2x+1)dx}{x(x^2+3x-4)} = \left|\begin{matrix} x^2+3x-4=0 \\ \mathrm{D}=9-4(-4)=25 \\ \mathrm{x}_1=\frac{-3-5}{2}=-4 \\ \mathrm{x}_2=\frac{-3+5}{2}=1 \end{matrix}\right| = \int\frac{(2x+1)dx}{x(x-1)(x+4)} = \left\{\begin{matrix} \textit{Разложим дробь на} \\ \textit{элементарные} \end{matrix}\right\} =$$

$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-12}+\frac{C}{(x+4)}\right)dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \frac{A(x-1)(x+4)+Bx(x+4)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+4)} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+4)} \\ A(x-1)(x+4)+\mathrm{B}x(x+4)+Cx(x-1)=2x+1 \\ Ax^2+3Ax-4A+Bx^2+4Bx+Cx^2-Cx=2x+1 \\ x^2(A+B+C)+x(3A+4B-C)-4A=2x+1 \end{matrix}\right\}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
A+B+C=0\\
3A+4B-C=2;\quad -4A=1;\quad \underline{A=-\frac{1}{4}}\\
\begin{cases}-\frac{1}{4}+B+C=0 & B=\frac{1}{4}-C\\ -\frac{3}{4}+4B-C=0 & -\frac{3}{4}+4\left(\frac{1}{4}-C\right)-C=0;-\frac{3}{4}+1-4C-C=0\end{cases}\\
\frac{1}{4}-5c=0\qquad -5c=-\frac{1}{4};\quad \underline{c=\frac{1}{20}}\\
\underline{B=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{5}}
\end{array}\right\}=
$$

$$
\int\frac{(\sqrt[4]{x}-1)dx}{(\sqrt{x}-2)\sqrt[4]{x^3}}=\left\{\begin{array}{l}
\sqrt[4]{x}=U\quad dU=\frac{1}{4}x^{\left(\frac{1}{4}-1\right)}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}dx\\
dx=4\sqrt[4]{x^3}dU=4U^3dU\\
\sqrt{x}=\sqrt[4]{x^2}=U^2\sqrt[4]{x^3}=U^3
\end{array}\right\}=\int\frac{(U-1)4UdU}{(U^2-1)U^3}=\int\frac{(U-1)4dU}{(U-1)(U+1)U^2}=
$$

г)

$$
=4\int\frac{dU}{(U+1)U^2}=4\int\frac{dU}{(U+1)U^2}=\left\{\begin{array}{l}
\frac{A}{U+1}+\frac{B}{U^2}+\frac{C}{U}=\frac{U^2A+B(U+1)+CU(U+1)}{U^2(U+1)}\\
=\frac{U^2A+BU+B+CU^2+CU}{U^2(U+1)}=\frac{1}{U^2(U+1)}=\\
U^2A+BU+B+CU^2+CU=1\\
U^2A+BU+B=-CU^2-CU+1\Rightarrow\\
\Rightarrow A=-C,B=-C,B=1\Rightarrow C=-1,A=1
\end{array}\right\}=
$$

$$
=4\int\left(\frac{dU}{(U+1)}+\frac{1}{U^2}-\frac{1}{U}\right)dU=4\left(\int\frac{dU}{(U+1)}+\int\frac{dU}{U^2}-\int\frac{dU}{U}\right)=4\ln\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}}-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+C
$$

д)

$$
\int\sin^4 xdx=\left\{\begin{array}{l}
\sin x=U\\
dU=\cos xdx\\
dx=\frac{dU}{\cos x}=\frac{du}{\sqrt{1-\sin x}}=\frac{du}{\sqrt{1-U^2}}
\end{array}\right\}=-\int\frac{U^4dU}{\sqrt{1-U^2}}
$$

$$
\left|\int\sin^m(x)dx=-\frac{\cos(x)\sin^{m-1}(x)}{m}+\frac{m-1}{m}\int\sin^{-2+m}(x)dx\right|\qquad m=4\Rightarrow\frac{-\cos x\sin^3 x}{4}+\frac{3}{4}\int\sin^2(x)dx=
$$

$$
-\frac{\cos x\sin^3 x}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)=\frac{3x}{8}-\frac{3\sin 2x}{16}-\frac{\cos x\sin^3 x}{4}=\frac{3x}{8}-\frac{6\sin x\cos x}{16}-\frac{2\cos x\sin^3 x}{4}=
$$

$$
=\frac{3x}{8}-\frac{3\sin 2x}{16}-\frac{\sin 2x\sin^2 x}{8}=\frac{3x}{8}-\frac{3\sin 2x-2\sin 2x\sin^2 x}{16}=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x(3-2\sin^2 x)}{16}=
$$

$$
=\frac{3x}{8}-\frac{6\sin x\cos x}{16}-\frac{2\cos x\sin^3 x}{16}=\frac{1}{8}(3x-3\sin x\cos x-2\cos x\sin^3 x)
$$

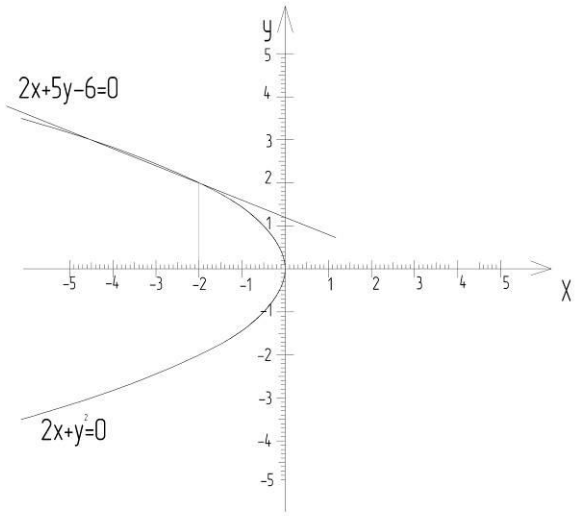
Задача 9. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ dx = 2\sqrt{x}du = 2Udu \end{array} \right| = \int_1^\infty \frac{2udu}{(1+u^2)U} = 2\int_1^\infty \frac{dU}{1+U^2} = 2\lim_{a\to\infty} \Big|_1^a \frac{du}{1+u^2} =$$

$$2\lim_{a\to\infty} \Big|_1^a arctg(u) = 2\lim_{a\to\infty} \Big|^a arctg\sqrt{x} = 2\lim_{a\to\infty}(arctg\sqrt{a} - arctg1) = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Задача 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями $f(x) = 2x + y^2 = 0 \qquad g(x) = 2x + 5y - 6$. Сделать чертеж.

Решение. Построим графики функций и найдем их точки пересечения.



Точки пересечения:

$$\begin{cases} 2x + y^2 = 0 \\ 2x + 5y - 6 = 0 \end{cases} \quad x = -\frac{y^2}{2} \qquad x = \frac{6-5y}{2}$$

$$-y^2 + 5y - 6 = 0$$

$$D = 25 - 4(-1)(-6) = 1$$

$$y_1 = \frac{-5+1}{-2} = 2; \; y_2 = \frac{-5-1}{-2} = 3$$

$$x_1 = -\frac{2^2}{2} = -2; \; x_2 = -\frac{3^2}{2} = -4{,}5 \qquad A(-2;2);\, B(-4{,}5;3)$$

Площадь фигуры, ограниченной линиями находится по формуле:

$$S = \int_2^3 (f(x) - g(x))dx = \int_2^3 \left(-\frac{y^2}{2} - \frac{6-5y}{2}\right)dy = -\frac{1}{2}\int_2^3 (y^2 + 6 - 5y)dy =$$

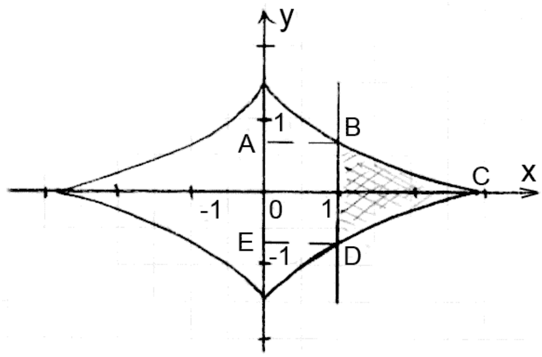
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} + 6y - \frac{5y^2}{2}\right)\Big|_2^3 = -\frac{y^3}{6} - 3y + \frac{5y^2}{4}\Big|_2^3 = \left(-\frac{27}{6} - 9 + \frac{45}{4}\right) - \left(-\frac{8}{6} - 6 + 5\right) =$$

$$= -\frac{27}{6} + \frac{45}{4} + \frac{8}{6} - 8 = \frac{-54 + 1325 + 16 - 96}{12} = \frac{1}{12}(ед^2).$$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$$

$$x = 1 (x \geq 1).$$



$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Пределы интегрирования найдем из решения неравенства

$$2\sqrt{2}\cos^3 t\ge 1 \Rightarrow t\in\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right].$$

$$S=S_{ABCDE}-S_{ABDE}=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{2}\sin^3 t\cdot 6\sqrt{2}\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt=1\cdot 1=$$

$$12\int \sin^4 t\cos^2 tdt-1=12\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{8}(\cos 4t-4\cos 2t+3)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt-1=$$

$$=\frac{12}{16}\int_{\pi/4}^{-\pi/4}(-\cos 4t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 6t+1)dt-1=$$

$$=\frac{12}{16}\left(-\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}\sin 6t+t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{-\pi/4}-1=1{,}7.$$

Задача 11. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, 0\le x\le\frac{8}{9}.$$

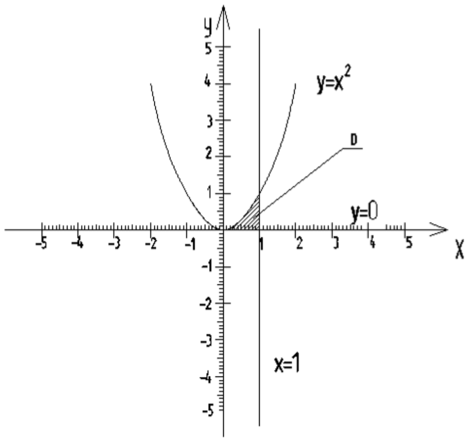
$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

$$l=\int_0^{8/9}\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{1-x^2}}dx=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2+2x+1}{1-x^2}}dx=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{2+2x}{1-x^2}}dx=$$

$$=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{2}{1-x}}dx=\sqrt{2}\int_0^{8/9}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{2}{1-x}}\Bigg|_0^{8/9}=-2(\sqrt{2/9}-\sqrt{2})=-2\sqrt{2/9}+2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Задача 12. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (xy-4x+2y-1)dxdy$, *D:* x=1, *y*=x^2, *y*=0. Область интегрирования *D* изобразить на чертеже. Решить задачу вторым способом, поменяв порядок интегрирования.



Решение. Перейдем от двойного интеграла к двукратному по области D:

$$\iint\limits_D (xy-4x+2y-1)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy-4x+2y-1)dy.$$

Сначала вычисляем внутренний интеграл, где x – постоянная величина, а y – переменная. Имеем:

$$\int_0^{x^2}(xy-4x+2y-1)dy=\int_0^{x^2}[y(x+2)-(4x-1)]dy=\frac{(x+2)y^2}{2}-(4x+1)y\Big|_0^{x^2}=$$

$$=\frac{x^4(x+2)}{2}-x^2(4x+1)=\frac{x^5+2x^4}{2}-4x^3-x^2=\frac{x^5}{2}+x^4-4x^3-x^2$$

Затем находим внешний интеграл:

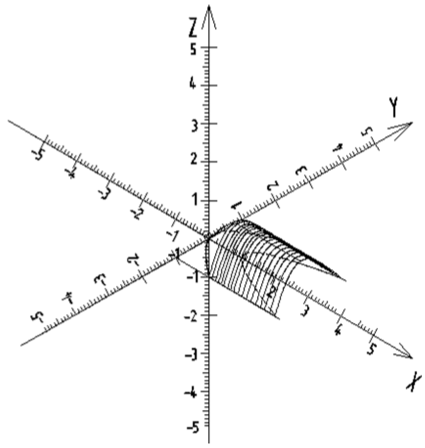
$$\int_0^1\left(\frac{x^5}{2}+x^4-4x^3-x^2\right)dx=\frac{x^6}{12}+\frac{x^5}{5}-\frac{4x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{5x^6+12x^5-60x^4-20x^3}{60}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{5+12-60-20}{60}=-\frac{63}{60}\approx-1{,}05.$$

Задача 13. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного данными поверхностями $z = 0$, $z – 1 + y^2 = 0$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy . Построить чертеж.

Решение. Тело, ограниченное плоскостью хоу ($z = 0$) и 3 параболическими цилиндрами $z=1-y^2$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$, изображено на рисунке. Его объем определяется формулой

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{z=z_к}^{z=z_c}dz=\iint\limits_{D_{xy}}(z_c-z_к)dxdy,$$



где V – область, занимаемая данным телом; D_{xy} – ее проекция на плоскость XOY; $z_к$ – плоскость хоу, $z_к=0$; z_c – большее значение z из уравнения: $z_c=1-y^2$.Область D_{xy} ограничена уравнениями $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$ и линиями пересечения плоскости хоу телом $z=1-y^2$.

$$V = \iint\limits_{Dxy} dxdy = \iint\limits_{0} dz = \int\limits_{dxy} (1-y^2)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2y^2+1} (1-y^2) =$$

$$\int\limits_{y^2}^{2y^2+1} \left(1-y^2\right)dx = (1-y^2)x\Big|_{y^2}^{2y^2+1} = (1-y^2)(2y^2+1)-(1-y^2)y^2 = 2y^2+1-2y^4-y^2-y^2+y^4 =$$

$$= y^4+1$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(y^4+1\right)dy = \frac{y^5}{5}+y\,\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5}+1-(-\frac{1}{5}-1) = \frac{1}{5}+1+\frac{1}{5}+1 = 2{,}4$$

$$V = 2{,}4$$

Раздел 3.

Задача 14. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

(Ответ представить в виде $\psi(x,y)=C$).

$$y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$$

$$y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1,$$

$$\frac{dy}{dx}y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1,$$

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$-\sqrt{1-y^2}=-\arcsin x+C,$$

$$C=\arcsin x-\sqrt{1-y^2}.$$

Задача 15. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y'=\frac{x+2y}{2x-y}.$$

$$y'=\frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}},$$

Введем замену $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u+u'x.$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u}{2-u},$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2-u},$$

$$\frac{2-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x},$$

$$2arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln|x| + \ln C,$$

$$2arctg\,\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + \ln C.$$

Задача 16. Найти решение задачи Коши.

$$y' - y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, y(0) = 0.$$

$$y' + P(x)y = f(x),$$

Пусть $y = uv$.

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции v, находим

$$v = e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \cos x dx} = e^{-\sin x}.$$

$$u = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{e^{-\sin x}}dx = \frac{1}{2}\int e^{\sin x}\sin 2x dx = \int e^{\sin x}\sin x\cos x dx = \begin{vmatrix}\sin x = t \\ \cos x dx = dt\end{vmatrix} = \int e^t dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t \\ du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{vmatrix} = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C.$$

$$y = e^{-\sin x}(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C),$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 1\cdot(0\cdot 1 - 1 + C) \Rightarrow C = 1.$$
$$y = e^{-\sin x}(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + 1).$$

Задача 17. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y''' ctg 2x + 2y'' = 0.$$

Замена: $\begin{cases} y'' = z(x), \\ y''' = z'(x). \end{cases}$

$$z' ctg 2x + 2z = 0,$$

$$z' + 2\frac{z}{ctg 2x} = 0.$$

Предположим, что $z = uv$.

$$u'v + uv' + 2\frac{uv}{ctg 2x} = 0,$$

$$u'v + u\left(v' + 2\frac{v}{ctg 2x}\right) = 0.$$

Пусть $v' + 2\frac{v}{ctg 2x} = 0.$

$$\frac{dv}{dx} = -2\frac{v}{ctg 2x},$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{ctg 2x},$$

$\ln v = \ln \cos 2x \Rightarrow v = \cos 2x.$

$u'v = 0,$

$\frac{du}{dv} \cos 2x = 0,$

$u = C_1,$

$z = C_1 \cos 2x.$

$y' = \int C_1 \cos 2x dx = \frac{1}{2} C_1 \sin 2x + C_2.$

$y = \int \left(\frac{1}{2} C_1 \sin 2x + C_2 \right) dx = -\frac{1}{4} C_1 \cos 2x + C_2 x + C_3.$

Задача 11. Найти решение задачи Коши.

$y'' = 72y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6.$

Замена: $\begin{cases} y' = z(y), \\ y'' = z'(y) \cdot z(y). \end{cases}$

$z'_y z = 72y^3,$

$\frac{\partial z}{\partial y} z = 72y^3,$

$\int z \partial z = 72 \int y^3 \partial y,$

$\frac{1}{2} z^2 = 18y^4 + C_1,$

$z^2 = 36y^4 + 2C_{1.}$

$z^2 = (y')^2 \Rightarrow (y')^2 = 36y^4 + 2C_1.$

$36 = 36 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$

$y' = \sqrt{36y^4},$

$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{36y^4},$

$\frac{dy}{6y^2} = \int dx,$

$\int -\frac{1}{6y} = x + C_2,$

$y = -\frac{1}{6(x + C_2)}.$

$x = 2, y = 1,\ 1 = -\frac{1}{6(2 + C_2)} \Rightarrow C_2 = -\frac{13}{6}.$

$y = -\frac{1}{6x - 13}.$

Задача 19. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x.$

$y_{ОН} = y_{ОО} + y_{ЧН}.$

$\lambda^2 + \lambda = 0$-характеристическое уравнение.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,$

$y_{OO} = C_1 + C_2 e^{-x}$-общее решение однородного уравнения.

$$y_{ЧН} = A\cos x + B\sin x + Ce^x,$$
$$y' = -A\sin x + B\cos x + Ce^x,$$
$$y'' = -A\cos x - B\sin x + Ce^x,$$
$$-A\cos x - B\sin x + Ce^x + A\cos x + B\sin x + Ce^x = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x,$$
$$2Ce^x = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x.$$

$2C = 2 \Rightarrow C = 1.$

Отсюда $y_{ЧН} = e^x$ - частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение

$$y_{OН} = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x.$$

Задача 20. Найти решение задачи Коши.

$$y'' + 4y = 4ctg\,2x, y(\pi/4) = 3, y'(\pi/4) = 2.$$

$$y_{OН} = y_{OO} + y_{ЧН}.$$

$\lambda^2 + 4\lambda = 0$-характеристическое уравнение.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4,$

$y_{OO} = C_1 + C_2 e^{-4x}$-общее решение однородного уравнения.

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0, \\ u'y_1' + v'y_2' = f(x) \end{cases},$$

$$\begin{cases} u' \cdot 1 + v'e^{-4x} = 0, \\ u' \cdot 0 + v'(-4e^{-4x}) = 4ctg\,2x \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-4x} \\ 0 & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = 4e^{-4x},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-4x} \\ 4ctg\,2x & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = -4e^{-4x} ctg\,2x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4ctg\,2x \end{vmatrix} = 4ctg\,2x.$$

$$u' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4e^{-4x} ctg\,2x}{-4e^{-4x}} = ctg\,2x,$$

$$v' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4ctg\,2x}{-4e^{-4x}} = -e^{4x} ctg\,2x.$$

$$u = \int ctg\,2x dx = \frac{1}{2}\ln\sin x + C_3,$$

$$v = -\int e^{4x} ctg\,2x dx = -\frac{1}{2}e^{4x} ctg\,2x + \frac{1}{4}e^{4x} ctg\,2x + C_4.$$

$$y_{ЧН} = \frac{1}{2}\ln\sin x + C_3 - \frac{1}{2}e^{4x}ctg\,2x + \frac{1}{4}e^{4x}ctg\,2x \cdot C_4,$$

$$y_{ЧН} = \frac{1}{2}\ln\sin x - \frac{1}{4}ctg\,2x + C_3 + e^{-4x} \cdot C_4,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + C_3 + C_4e^{-\pi},$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}ctg\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\sin^2\frac{\pi}{4}} - 4e^{-\pi} \cdot C_4,$$

$$C_4 = -\frac{e^{\pi}}{8},$$

$$C_3 = \frac{25 - 4\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}{8}.$$

Общее решение

$$y_{ОН} = \frac{1}{2}\ln\sin x - \frac{1}{4}ctg\,2x + \frac{25 - 4\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\pi}}{8}.$$

Критерии оценки расчетно-графической работы:

– уровень освоения учебного материала;

– глубина проработки материала;

– умение использовать теоретические знания при выполнении практических задач;

– оформление расчетно-графической работы в соответствии с требованиями.

1.7 Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Экзамен преследует цель оценить работу студента за определенный курс: полученные теоретические знания, их прочность, развитие логического и творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умения анализировать и синтезировать полученные знания и применять на практике решение практических задач.

Экзамен проводится в письменной форме по билетам, утвержденным заведующим кафедрой. Экзаменационный билет включает в себя два вопроса и задачи. Формулировка вопросов совпадает с формулировкой перечня вопросов, доведенного до сведения студентов за один месяц до экзаменационной сессии. В процессе подготовки к экзамену организована предэкзаменационная консультация для всех учебных групп. Результат экзамена выражается оценкой «отлично», «хорошо», «удовлетворительно».

С целью уточнения оценки экзаменатор может задать не более одного-двух дополнительных вопросов, не выходящих за рамки требований рабочей программы. Под дополнительным вопросом подразумевается вопрос, не связанный с тематикой вопросов билета. Дополнительный вопрос, также как и основные вопросы билета, требует развернутого ответа. Кроме того, преподаватель может задать ряд уточняющих и наводящих вопросов, связанных с тематикой основных вопросов билета. Число уточняющих и наводящих вопросов не ограничено.

1.8. Методические рекомендации по оформлению курсовой работы

Курсовая работа не предусмотрена

1.9. Рекомендуемая литература

дополнительно к литературе, указанной в рабочей программе, для углубленного изучения дисциплины «Математика» и расширения общего кругозора студентов, а также получения дополнительных навыков самостоятельной работы с литературными источниками может быть использована следующая литература, имеющаяся в библиотеках в ограниченных количествах

1. **Берман Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Берман Г. Н. - СПб.: Профессия, 2005. - 432с. - (Специалист). - ISBN 5-93913-009-7.
2. **Гмурман В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: [учебное пособие для вузов] / Гмурман В. Е. - Изд.10-е, стер. - М.: Высш. шк., 2004. - 479с.: ил.. - ISBN 5-06-004214-6.
3. **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: [учебное пособие для вузов] / Гмурман В. Е. - Изд. 8-е, стер. - М.: Высш. шк., 2003. - 404с.: ил.. - ISBN 5-06-004212-X.
4. **Запорожец Г. И.** Руководство к решению задач по математическому анализу: учебное пособие [для технических вузов] / Запорожец Г. И. - Изд. 6-е, стер. - СПб. и др.: Лань, 2010. - 460с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0912-9.
5. **Клетеник Д. В.** Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие / Клетеник Д. В., под ред. Н. В. Ефимова - Изд. 17-е, стер. - СПб.: Лань, 2010. - 223с.: ил.- (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-1051-4.
6. **Кудрявцев Л. Д.** Курс математического анализа: [учебник для вузов по естественнонауч. и техн. специальностям]: [в 3 т.] / Кудрявцев Л. Д. - Изд. 5-е, перераб. и доп. - М.: Дрофа, 2004. - 720с.: ил. - (Высшее образование: Современный учебник). - ISBN 5-7107-5004-2.
7. **Минорский В. П.** Сборник задач по высшей математике: [учебное пособие для втузов] / Минорский В. П. - Изд. 15-е - М.: Физ.-мат. лит., 2008. - 336с.. - ISBN 9875-94052-143-6.
8. **Мышкис А. Д.** Лекции по высшей математике: учебное пособие / Мышкис А. Д. - Изд. 6-е, испр. - СПб.: Лань, 2009. - 688с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0572-5.
9. **Письменный Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: 36 лекций / Письменный Д. Т. - 2-е изд., испр. - М.: Айрис Пресс, 2002. - 280с.. - ISBN 5-8112-0151-6.
10. **Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа Бермана**: учебное пособие / - СПб.: Лань, 2008. - 605с.: рис. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0887-0.

2. Методические рекомендации преподавателю по проведению занятий

2.1. Общие положения.

Основу профессиональной деятельности преподавателя составляет его методическая деятельность – деятельность по организации педагогического процесса, направленная на полноценно результативное освоение обучающимися соответствующего учебного предмета. Овладение преподавателем методической деятельностью происходит как в рамках методической подготовки в вузе и учреждениях дополнительного профессионального образования, так и в процессе самообразования. Уровень методической деятельности преподавателя должен быть таким, чтобы он мог помочь студентам быть активными деятелями в постижении знаний и в самосовершенствовании учебной деятельности. Поэтому высокие требования, предъявляемые к уровню методической деятельности преподавателей, автоматически выдвигают высокие требования к организации методической подготовки в вузе, в системе повышения квалификации и переподготовки и к процессу самообразования.

В современных условиях повышение уровня методической подготовки преподавателя может обеспечиваться определением и разработкой новых подходов к целям, содержанию и организации методической подготовки.

Основными требованиями, которые предъявляются в современных условиях к преподавателю математики в вузе являются:

1. Высокий уровень профессиональной математической подготовки, предполагающий знание программы по математике в полном объёме, умение соблюдать преемственность в преподавании математики.

2. Владение современным дидактическим инструментарием, позволяющим успешно работать с группой обучаемых, имеющих различный уровень базовой подготовки.

3. Умение осуществлять в учебном процессе дифференцированный, личностно-ориентированный подход к студентам.

4. Знание современных ИТ и их возможностей в области математики; умение квалифицированно оценивать и отбирать программные продукты с точки зрения их педагогической целесообразности для использования в учебном процессе.

5. Наличие представлений о специфике смежных дисциплин учебной программы для установления и укрепления межпредметных связей.

6. Умение организовывать самостоятельную работу обучаемых при изучении математики.

В основе организации обучения студентов лежит принцип методической поддержки, который требует, чтобы студенты были в достаточной мере обеспечены учебно-методической литературой, позволяющей освоить базовый уровень подготовки.

Критерием реализации принципа методической поддержки служит наличие в учебно-методической литературе материалов следующих видов:

- ориентирующие учебно-методические материалы – тексты, раскрывающие технологии конструирования методической деятельности преподавателя и удовлетворяющие требованиям обоснованности, технологичности, минимальности;
- примеры-образцы методических разработок, которые демонстрируют реализацию ориентировочных основ методической деятельности и удовлетворяют требованиям научности содержания, методов и средств обучения, связи обучения с жизнью каждого учащегося, выдвижения учащихся на ведущие позиции;
- учебно-методические материалы для самоконтроля преподавателя – материалы, позволяющие осуществлять самоконтроль собственных методических разработок и выполнения методических знаний;
- целевые учебно-методические тексты – тексты, раскрывающие цели представленных учебно-методических материалов;
- методические задания, удовлетворяющие следующим требованиям: разработаны на основе анализа практики преподавателей (требование практического обобщения); учитывают те методические вопросы, в решении которых большинство преподавателей испытывают методические трудности (требование методических трудностей); снабжены методической поддержкой, обеспечивающей успешность их выполнения (требование успешности выполнения); являются комплексными (требование комплексности).

Лекционно-практическая форма обучения объективно предполагает разработку специальных методических пособий для проведения как лекций, так и для практических занятий. Упрощённо говоря, в основе любой методики лежат два основных компонента – содержание обучения («чему учить») и способы обучения («как учить»). Естественно, при формировании частных методик следует учитывать много субъективных факторов, связанных со специализацией студентов, уровнем их базовой подготовки, объёмом аудиторной нагрузки и т.д.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике, должны:

1) расширять и закреплять теоретические знания, полученные в ходе лекционных занятий;

2) формировать у студентов практические умения и навыки, необходимые для успешного решения задач;

3) развивать у студентов потребность в самообразовании и совершенствовании знаний и

умений в процессе изучения дисциплины;

4) формировать творческое отношение и исследовательский подход в процессе изучения математики;

5) формировать профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

Разрабатывая методическое пособие для проведения практических занятий по математике, в первую очередь необходимо опираться на действующую рабочую программу по дисциплине, в которой обязательно должны быть определены количество и тематика практических занятий на каждый семестр. Для каждого занятия определяются тема, цель, структура и содержание. Исходя из них, выбираются форма проведения занятия (комбинированная, самостоятельная работа, фронтальный опрос, тестирование и т.д.) и дидактические методы, которые при этом применяет преподаватель (индивидуальная работа, работа по группам, деловая игра и проч.). Целесообразность выбора преподавателем того или иного метода зависит, главным образом, от его эффективности в конкретной ситуации. Например, если преподаватель ставит задачу проверки уровня усвоения теоретического материала лекции, предшествующей данному практическому занятию, то удобно провести в начале занятия устный фронтальный опрос; если ставится задача проверить знания студентов по более широкому кругу вопросов, то целесообразно провести небольшое по времени (не более, чем на 1 академический час) тестирование; для выработки навыков решения обычно проводят письменный опрос студентов у доски и т.д.

Особое внимание следует уделить хронометражу занятия, т.е. выделению на каждый этап занятия определённого времени. Для преподавателя, особенно начинающего, чрезвычайно важно придерживаться запланированного хронометража. Если этого не удаётся сделать, то преподавателю необходимо проанализировать ход занятия и, возможно, внести изменения либо в его структуру, либо в форму его проведения.

Дисциплины математического цикла изучаются на младших курсах, поэтому при выборе методов для начального этапа обучения необходимо учитывать ряд важных обстоятельств. Студенты первого курса являются выпускниками различных школ, которые зачастую обучались по весьма различным учебным программам и, естественно у разных преподавателей, использовали различные учебники и учебные пособия, что накладывает существенный отпечаток как на уровень их знаний в области математики, так и на восприятие ими учебного материала.

Таким образом, обучение студентов на первых практических занятиях должно носить выраженный дифференцированный характер в зависимости от уровня и состояния их предшествующей подготовки. При этом одной из главных задач, которые решаются на данном этапе изучения математики, является выравнивание, нивелирование знаний обучаемых. Предполагается, что по завершении обучения на этом этапе (1-2 месяца) студенты будут иметь приблизительно одинаковый уровень подготовки в области решения практических задач по математике, и в дальнейшем обучении преподаватель может учитывать это при планировании и проведении занятий.

Решение учебных задач является универсальным видом учебной деятельности, который успешно применяется в методике всех вузовских математических дисциплин. С его помощью решаются разнообразные дидактические задачи, отражающие специфику целей, форм и методов обучения математике. Полезно также адаптировать ряд стандартных математических задач (таких, например, как поиск наименьшего и наибольшего значения функции на отрезке) к решению их на компьютере, с целью выработки навыков применения информационных технологий в решении математических задач.

Следует учитывать тот факт, что к изучению некоторых разделов математических дисциплин приступают уже в определённой мере подготовленными в результате предшествующей школьной подготовки, и это следует учитывать при составлении и проведении соответствующих практических работ. Поэтому здесь можно представить задание в более сложном, формализованном виде, не сопровождая его чрезмерно подробными инструкциями по выполнению - достаточно будет привести несколько типичных несложных примеров. С другой стороны, для того, чтобы успешно решать принципиально новые для них задачи, студенты обязательно должны разбирать типовые способы их решения не только на лекциях, но и на практических занятиях. При этом, однако, преподаватель не должен превращать практическое занятие в продолжение лекции.

Чтобы научить студентов применять на практике теоретические знания, полученные при изучении математики преподаватель должен уметь выбирать или разрабатывать необходимый математический учебный материал для каждого занятия. Необходимость планировать и анализировать учебно-воспитательный процесс в дидактическом, психологическом, методическом аспектах с учетом современных требований к преподаванию математики обуславливает, в свою очередь, необходимость обоснованного выбора эффективных методов, форм и средств обучения, контроля результатов усвоения студентами программного материала.

Преподаватель должен систематически проводить самоанализ, самооценку и корректировку собственной деятельности на уроках и внеклассных занятиях по математике, разрабатывать и проводить диагностику для определения уровня знаний и умений студентов, разрабатывать и реализовывать программы для индивидуальных и групповых форм работы с учетом математических способностей студентов.

Основным условием учебно-методического обеспечения практических занятий по математике является непрерывность психолого-педагогического и методико-математического образования преподавателя, взаимосвязь практики с системой изучения студентами нормативных учебных дисциплин и курсов по выбору, дающих теоретическое обоснование практической деятельности, позволяющих осмысливать и совершенствовать ее с позиций научного анализа.

2.2. Методические рекомендации по проведению практических занятий.

При проведении практических занятий по дисциплине «Математика» рекомендуется использовать следующую учебную литературу.

Раздел 1. Аналитическая геометрия с элементами линейной алгебры.

Основной учебник: **Сборник задач по математике для втузов**: учебное пособие : в 4 ч. / Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Коган С. М. и др. ; под ред. Ефимова А. В., Поспелова А. С. - М.: Физ.-мат. лит. 2004. - 431с., 288 с., 575 с., 239 с.: рис.. - ISBN 5-94052-033-2. (часть 1)

Дополнительный учебник:

1. Кардаков В.Б. **Сборник задач по высшей математике. Часть 1** [Электронный ресурс] / В.Б. Кардаков, П.П. Колобов, А.М. Раменский. — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), ЭБС АСВ, 2015. — 85 с. — 978-5-7795-0730-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68821.html

2. **Клетеник Д. В.** Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие / Клетеник Д. В., под ред. Н. В. Ефимова - Изд. 17-е, стер. - СПб.: Лань, 2010. - 223с.: ил.- (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-1051-4.

Раздел 2, 4. Математический анализ

Основной учебник: **Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие** : в 4 ч. Ч.2, 3 / Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Коган С. М. и др. ; под ред. Ефимова А. В., Поспелова А. С. - М. : Физ.-мат. лит., 2004. - 431с.

Дополнительный учебник:

1. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие : в 4 ч. Ч.2 / Вуколов Э. А., Ефимов А. В., Земсков В. Н., Поспелов А. С. ; под ред. Ефимова А. В., Поспелова А. С. - М. : Физматлит, 2004. - 431с

2. **Берман Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Берман Г. Н. - СПб.: Профессия, 2005. - 432с. - (Специалист). - ISBN 5-93913-009-7.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения

Основной учебник: **Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие** : в 4 ч. Ч.2, 3 / Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Коган С. М. и др. ; под ред. Ефимова А. В., Поспелова А. С. - М. : Физ.-мат. лит., 2004. - 431с.

Дополнительный учебник:

1. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие : в 4 ч. Ч.2 / Вуколов Э. А., Ефимов А. В., Земсков В. Н., Поспелов А. С. ; под ред. Ефимова А. В., Поспелова А. С. - М. : Физматлит, 2004. - 431с
2. **Берман Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Берман Г. Н. - СПб.: Профессия, 2005. - 432с. - (Специалист). - ISBN 5-93913-009-7.

Раздел 5. Теория вероятностей и математическая статистика

Основной учебник: **Сборник задач по математике для втузов**: учебное пособие : в 4 ч. / Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Коган С. М. и др. ; под ред. Ефимова А. В., Поспелова А. С. - М.: Физ.-мат. лит. 2004. - 431с., 288 с., 575 с., 239 с.: рис.. - ISBN 5-94052-033-2. (часть 4)

Дополнительный учебник: **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: [учебное пособие для вузов] / Гмурман В. Е. - Изд. 8-е, стер. - М.: Высш. шк., 2003. - 404с.: ил.. - ISBN 5-06-004212-X.